Proprietà della circonferenza

152 Osserviamo che la simmetria di centro O muta la circonferenza (e il cerchio) in se stessa, cioè O è centro di simmetria per la circonferenza (e per il cerchio). Tale simmetria si può immaginare realizzata dalla *rotazione* del piano, attorno al punto O, di un angolo uguale ad un angolo piatto.*

* Nel movimento di rotazione del piano attorno al punto O dobbiamo pensare a due piani sovrapposti di cui uno sta fermo e l'altro ruota attorno a quel punto.

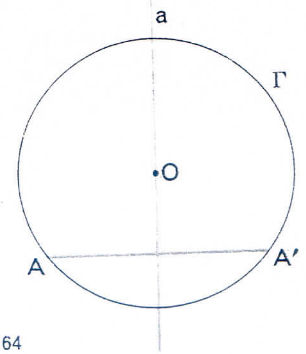

fig. 164

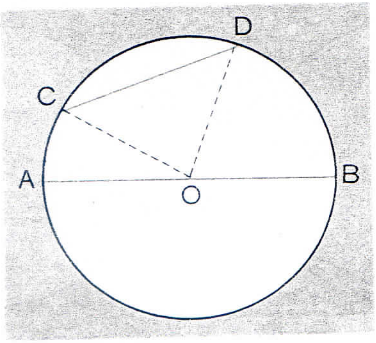

fig. 165

Viene spontaneo, adesso, immaginare anche rotazioni del piano di un angolo α qualunque, e in questo modo si generano — fra i punti della circonferenza, e più in generale del piano — delle corrispondenze che si chiamano *rotazioni del piano di un angolo α intorno a O*. Esse sono delle congruenze, in quanto si tratta di movimenti rigidi sovrapponenti il piano a se stesso.

Una circonferenza (un cerchio) è pertanto congruente a se stessa in infiniti modi: ad un suo punto, cioè, possiamo far corrispondere un altro punto qualsiasi. Anche per due circonferenze congruenti la corrispondenza fra i loro punti può essere stabilita in infiniti modi. Si tratta dell'unico caso di figure piane finite che siano congruenti in infiniti modi.

153 Ci sono anche infinite simmetrie assiali che mutano la circonferenza in se stessa: tutte quelle che hanno per assi di simmetria le rette diametrali della circonferenza, cioè le rette del piano passanti per il centro.

Infatti il ribaltamento del piano della circonferenza Γ (fig. 164) attorno ad a, lasciando fermo O, sovrappone la circonferenza Γ (luogo dei punti equidistanti da O) a se stessa. Pertanto, il simmetrico di un punto A rispetto ad una retta diametrale è un punto A' della stessa circonferenza.

Ciò equivale ad affermare che *la retta diametrale, perpendicolare ad una corda AA', incontra la corda nel suo punto medio, è cioè l'asse della corda.*

Questa proposizione è, ovviamente, l'inversa della proposizione seguente: *l'asse di una corda è una retta diametrale.* Tale proposizione discende immediatamente dalla circostanza che l'asse è luogo dei punti equidistanti dagli estremi della corda e il centro è uno di questi punti.

154 TEOREMA In una circonferenza ogni diametro è maggiore di qualsiasi altra corda.

In una circonferenza di centro O, sia AB un diametro e CD una corda qualsiasi non passante per il centro (fig. 165) (ipotesi). Congiunti i punti C e D con O, dal triangolo COD si ricava:

$$CD < CO + OD.$$

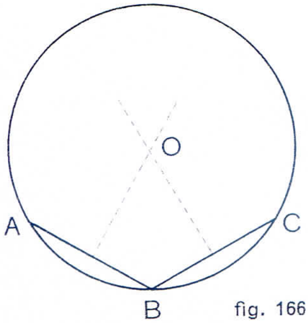

fig. 166

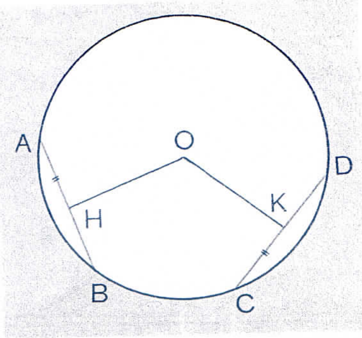

fig. 167

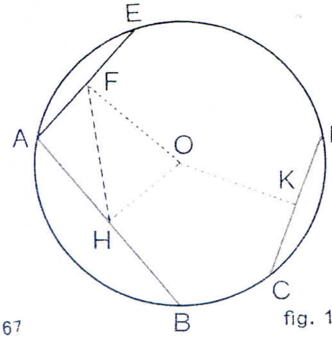

fig. 168

Ma CO e OD sono due raggi, quindi la loro somma è uguale a un diametro AB della circonferenza e resta così provata la tesi.

155 TEOREMA Una retta e una circonferenza non possono avere più di due punti in comune.

Infatti, se una retta avesse in comune con una circonferenza tre punti A, B, C, i segmenti, AB, BC sarebbero due corde e i loro assi dovrebbero incontrarsi nel centro della circonferenza, mentre essendo perpendicolari ambedue a una medesima retta sono paralleli fra loro (n. 71).

In particolare una circonferenza non può contenere un segmento di retta ed è perciò una *linea curva* (n. 40).

156 TEOREMA Per tre punti non allineati passa una circonferenza e una sola.

Siano A, B, C tre punti non allineati (fig. 166). Gli assi dei segmenti AB, BC si intersecheranno in un punto O (n. 74) equidistante dai tre punti; tale punto O sarà quindi il centro di una circonferenza passante per A, B, C. D'altra parte questa circonferenza è unica perchè O, intersezione di due rette che sono luoghi geometrici, è l'unico punto del piano che goda della proprietà di essere equidistante da A, B, C.

157 TEOREMA In una stessa circonferenza corde congruenti hanno distanze congruenti dal centro.

Infatti (fig. 167), la rotazione del piano attorno ad O che sovrappone la corda AB alla corda CD, sovrappone la distanza OH alla distanza OK.

La stessa rotazione sovrappone l'arco AB all'arco CD quindi si può affermare che *corde congruenti sottendono archi congruenti* e viceversa.

158 TEOREMA In una stessa circonferenza (o in circonferenze congruenti) due corde disuguali distano diversamente dal centro e precisamente quella maggiore ha dal centro distanza minore.

Siano AB, CD due corde diseguali della circonferenza di centro O (fig. 168); OH, OK le rispettive distanze dal centro: diciamo che se $AB > CD$ è $OK > OH$.

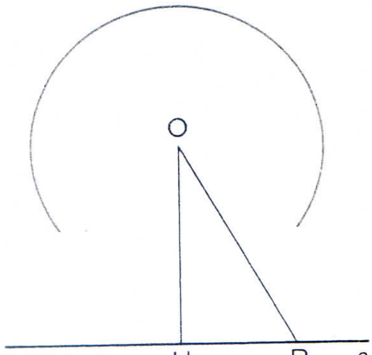

fig. 169

A partire da A si prenda la corda $AE \cong CD$; per il teorema del n. precedente la distanza OF di AE dal centro è congruente a OK, quindi basta dimostrare che $OH < OF$.

A tale scopo si unisca H con F e si osservi che essendo AH, AF rispettivamente metà delle corde AB, AE, sarà, per l'ipotesi posta, $AH > AF$, perciò nel triangolo HAF si avrà:

$$\widehat{AFH} > \widehat{AHF}.$$

I complementi di questi due angoli, che sono rispettivamente $\widehat{HFO}$, $\widehat{FHO}$, saranno diseguali in senso contrario e perciò sarà:

$$\widehat{HFO} \not> \widehat{FHO}.$$

Nel triangolo HOF si avrà allora:

$$OH < OF.$$

159 Raccogliamo in un quadro gli enunciati dei teoremi 157, 158 in cui indichiamo con c_1, c_2 due corde e d_1, d_2 le loro distanze dal centro:

$$c_1 \cong c_2 \Rightarrow d_1 \cong d_2$$
$$c_1 > c_2 \Rightarrow d_1 < d_2$$
$$c_1 < c_2 \Rightarrow d_1 > d_2.$$

Ravvisiamo anche qui le condizioni per poter applicare la seconda legge delle inverse: **sopra due corde** sono state fatte tutte le possibili ipotesi le quali portano a tesi che si escludono a vicenda.

Allora sussistono i teoremi inversi:

$$d_1 \cong d_2 \Rightarrow c_1 \cong c_2$$
$$d_1 < d_2 \Rightarrow c_1 > c_2$$
$$d_1 > d_2 \Rightarrow c_1 < c_2.$$