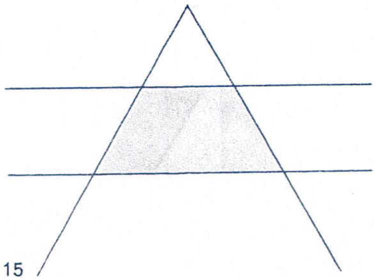

fig. 115

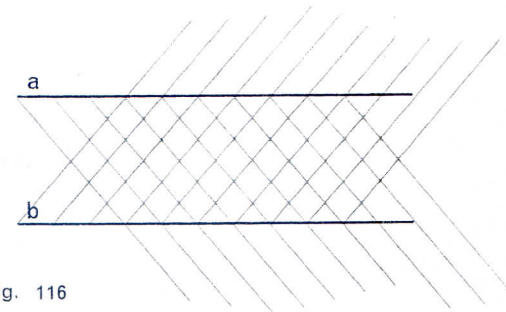

fig. 116

CAPITOLO V

Trapezi e parallelogrammi

Trapezi

100 DEFINIZIONE Si chiama **trapezio** un quadrangolo convesso avente due lati opposti paralleli.

I due lati paralleli si dicono anche le *basi* del trapezio. Gli altri due lati si dicono *lati obliqui* o semplicemente *lati*. Se i due lati obliqui di un trapezio sono congruenti, il trapezio si dice *isoscele*.

Se uno dei due lati non paralleli è perpendicolare alle basi, il trapezio corrispondente si dice trapezio *rettangolo*.

Un trapezio si può considerare come intersezione di una *striscia* e di un angolo convesso (fig. 115).

Intendiamo per **striscia** la figura definita in questo modo: siano le due rette parallele a, b (fig. 116). La figura intersezione del semipiano di origine a che contiene b, con il semipiano di origine b, che contiene a, si dice **striscia**. Le rette a, b si chiamano **lati** della striscia. La striscia è una figura convessa, perchè intersezione di figure convesse (i due semipiani nominati).

101 Lemma Se due rette sono parallele, tutti i punti dell'una sono equidistanti dall'altra.

Infatti (fig. 117) se A, C sono due punti qualunque di a e B, D le loro proiezioni sulla b, i segmenti AB, CD perpendicolari alla b lo sono anche alla retta a (coroll. 4 n. 74). Allora i triangoli rettangoli ABD e ACD risultano congruenti perchè hanno il lato AD in comune e gli angoli CAD e BDA congruenti perchè alterni interni di rette parallele. Segue che è $AB \simeq CD$.

TEOREMA In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti o supplementari.

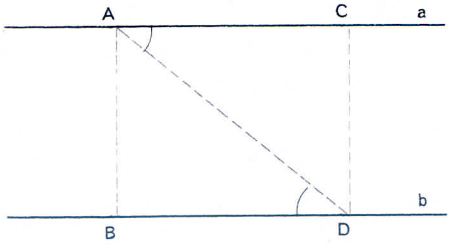

fig. 117

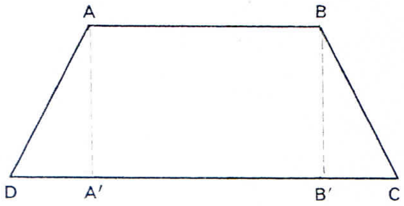

fig. 118 a

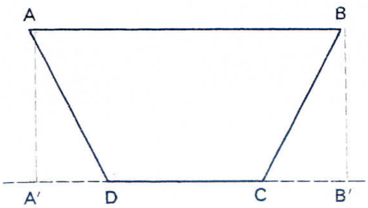

fig. 118 b

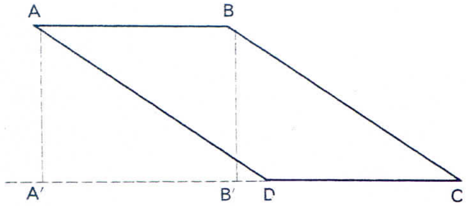

fig. 118 c

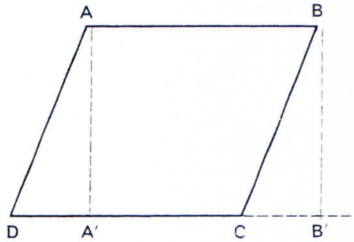

fig. 118 d 1

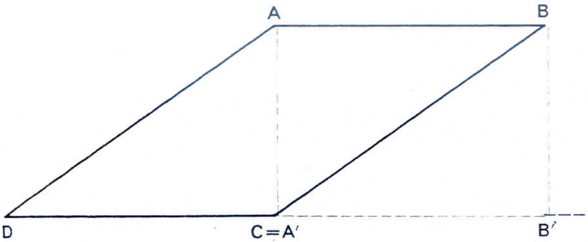

fig. 118 d 2

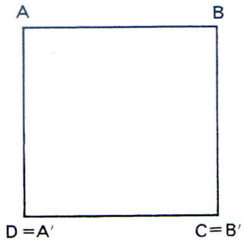

fig. 118 e

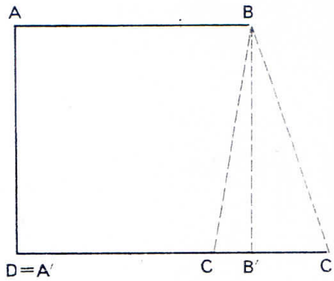

fig. 118 f

Siano *AB* e *CD* le basi di un trapezio isoscele e *A′*, *B′* le proiezioni di *A*, *B* sulla retta *CD*. Si possono presentare i seguenti cinque casi:

1) *A′*, *B′* cadono tra *C* e *D* (fig. 118, a)

2) *A′*, *B′* sono esterni al segmento *CD*, sul prolungamento di *CD*, l'uno dalla parte di *D* e l'altro dalla parte di *C* (fig. 118, b)

3) *A′*, *B′* sono esterni al segmento *CD*, sul prolungamento di *CD*, entrambi dalla stessa parte (fig. 118, c)

4) Uno solo dei due punti (per es. *A′*) è interno al segmento *CD* o coincide con un suo estremo (per es. *C*) (figg. 118, d_1 e d_2).

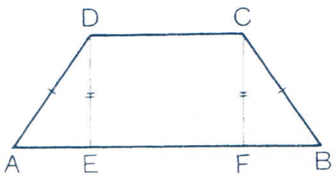

fig. 119

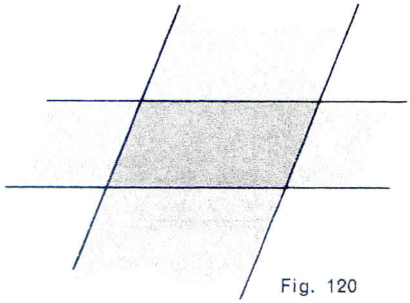

Fig. 120

5) A' coincide con D e B' con C (fig. 118, e).

Il caso di A' coincidente con D e contemporaneamente di B' interno oppure esterno al segmento CD non può verificarsi perchè, essendo $AD = AA' \simeq BB'$ (lemma precedente) e $AD \simeq BC$ (per ipotesi), dovrebbe risultare anche $BB' \simeq BC$, il che è assurdo (fig. 118, f).

Nel caso 1 e nel caso 2 gli angoli ADC e BCD sono congruenti: infatti per il teor. n. 93 sono congruenti i triangoli rettangoli $AA'D$ e $BB'C$.

Nel caso 3 e nel caso 4 gli angoli in questione sono supplementari; nel caso 5 gli angoli adiacenti a ciascuna base sono sia congruenti che supplementari.

102 TEOREMA (reciproco del precedente) **Un trapezio, che ha congruenti gli angoli adiacenti ad una base, è isoscele.**

Sia $ABCD$ (fig. 119) un trapezio i cui angoli $\widehat{DAB}$ e $\widehat{ABC}$ adiacenti alla base maggiore AB sono congruenti (ipotesi); diciamo che i lati non paralleli AD e BC sono congruenti (tesi).

Siano E ed F le proiezioni di D e C sulla base AB; consideriamo i due triangoli rettangoli AED, BFC: essi sono congruenti perchè hanno congruenti un cateto e l'angolo acuto opposto. Sono perciò congruenti le ipotenuse, cioè $AD \simeq BC$.

Parallelogrammi e loro proprietà

103 In un quadrangolo* convesso due lati o due angoli non consecutivi si dicono *opposti*. Per esempio, in un quadrilatero $ABCD$, AB e DC oppure AD e BC sono lati opposti; e così sono opposti gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ oppure $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$.

104 DEFINIZIONE Un quadrilatero avente le coppie di lati opposti paralleli si dice **parallelogrammo**.

* Ricordiamo che i termini ***quadrangolo*** o ***quadrilatero*** sono sinonimi.