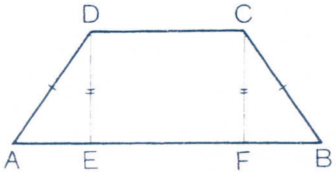

fig. 119

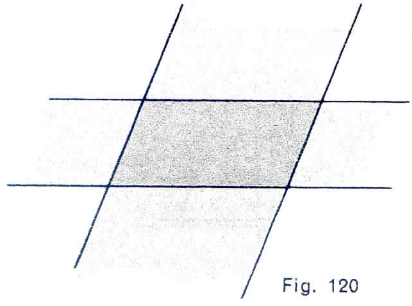
Fig. 120

5) A' coincide con D e B' con C (fig. 118, e).

Il caso di A' coincidente con D e contemporaneamente di B' interno oppure esterno al segmento CD non può verificarsi perchè, essendo $AD = AA' \cong BB'$ (lemma precedente) e $AD \cong BC$ (per ipotesi), dovrebbe risultare anche $BB' \cong BC$, il che è assurdo (fig. 118, f).

Nel caso 1 e nel caso 2 gli angoli ADC e BCD sono congruenti: infatti per il teor. n. 93 sono congruenti i triangoli rettangoli $AA'D$ e $BB'C$.

Nel caso 3 e nel caso 4 gli angoli in questione sono supplementari; nel caso 5 gli angoli adiacenti a ciascuna base sono sia congruenti che supplementari.

102 TEOREMA (reciproco del precedente) **Un trapezio, che ha congruenti gli angoli adiacenti ad una base, è isoscele.**

Sia $ABCD$ (fig. 119) un trapezio i cui angoli $\widehat{DAB}$ e $\widehat{ABC}$ adiacenti alla base maggiore AB sono congruenti (ipotesi); diciamo che i lati non paralleli AD e BC sono congruenti (tesi).

Siano E ed F le proiezioni di D e C sulla base AB; consideriamo i due triangoli rettangoli AED, BFC: essi sono congruenti perchè hanno congruenti un cateto e l'angolo acuto opposto. Sono perciò congruenti le ipotenuse, cioè $AD \cong BC$.

Parallelogrammi e loro proprietà

103 In un quadrangolo* convesso due lati o due angoli non consecutivi si dicono *opposti*. Per esempio, in un quadrilatero $ABCD$, AB e DC oppure AD e BC sono lati opposti; e così sono opposti gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ oppure $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$.

104 DEFINIZIONE Un quadrilatero avente le coppie di lati opposti paralleli si dice **parallelogrammo**.

* Ricordiamo che i termini *quadrangolo* o *quadrilatero* sono sinonimi.

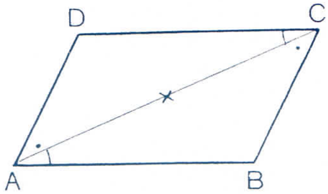

Fig. 121

Ogni parallelogrammo è convesso; infatti esso si può considerare come la figura intersezione di due strisce (fig. 120).

In un parallelogrammo la congiungente i punti medi di due lati opposti si chiama **mediana** del parallelogrammo.

In ogni quadrilatero e quindi, in particolare, in ogni parallelogrammo (in virtù del teor. n. 80), la somma degli angoli interni è uguale a due angoli piatti, ossia a quattro angoli retti.

105 TEOREMA In ogni parallelogrammo:

1) ciascuna diagonale divide il parallelogrammo in due triangoli congruenti;

2) i lati opposti sono congruenti;

3) gli angoli opposti sono congruenti;

4) gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari;

5) le due diagonali si tagliano scambievolmente per metà, cioè hanno lo stesso punto medio.

Nel parallelogrammo $ABCD$ (fig. 121) tracciamo al diagonale AC e dimostriamo:

1) *I due triangoli ABC, ADC sono congruenti.* Infatti, essi hanno il lato AC in comune e gli angoli che lo comprendono rispettivamente congruenti ($\widehat{CAB} \cong \widehat{ACD}$), perchè alterni interni rispetto alle parallele AB, DC e la trasversale AC; $\widehat{ACB} \cong \widehat{DAC}$ per una ragione analoga.

2) *I lati opposti sono congruenti.* Nei due triangoli congruenti ABC, ACD ad angoli congruenti si oppongono lati congruenti e perciò $AB \cong DC$ e $AD \cong BC$.

3) *Gli angoli opposti sono congruenti.* Negli stessi triangoli congruenti ABC, ACD gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{D}$ sono congruenti perchè opposti a lati congruenti; gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ sono congruenti perchè somme di angoli congruenti.

4) *Gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari.* Tali sono, ad esempio, gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, perchè coniugati interni rispetto alle parallele AD, BC tagliate dalla trasversale AB.

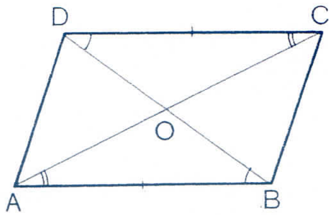

fig. 122

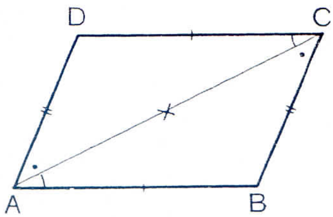

fig. 123

5) *Le diagonali si bisecano scambievolmente.* Tracciata la seconda diagonale, osserviamo che essa interseca la retta AC in un punto O, perchè i punti B e D sono da banda opposta rispetto a tale retta (fig. 122); siccome poi ciascuna diagonale è interna al poligono, lo è anche il punto O, il quale appartiene perciò al segmento AC. Si tratta allora di dimostrare che il punto O è il punto di mezzo tanto di AC quanto di BD.

Infatti, si considerino i due triangoli AOB, DOC: in essi è $AB \cong DC$ e $\widehat{CAB} \cong \widehat{ACD}$, come si è già dimostrato, ed è pure $\widehat{CDB} \cong \widehat{DBA}$, perchè angoli alterni interni formati dalle parallele AB, DC e la trasversale BD I due triangoli sono dunque congruenti (II Criterio) e perciò $OA \cong OC$ e $OB \cong OD$, come lati opposti ad angoli congruenti in triangoli congruenti.

106 DEFINIZIONE Il punto d'intersezione delle due diagonali si chiama **centro** del parallelogrammo, esso è centro di simmetria per il parallelogrammo. La simmetria rispetto ad O trasforma il parallelogrammo in se stesso.

DEFINIZIONE Ogni retta passante per il centro si chiama **retta diametrale.**

107 COROLLARIO Ogni retta diametrale che non contenga le diagonali divide il parallelogrammo in due trapezi congruenti.

Infatti essi sono simmetrici rispetto ad O.

108 Il teorema seguente fornisce quattro criteri per riconoscere quando un quadrangolo convesso è un parallelogrammo.

TEOREMA Un quadrangolo è un parallelogrammo:
1) se i lati opposti sono congruenti, oppure
2) se gli angoli opposti sono congruenti, oppure
3) se le diagonali hanno lo stesso punto medio, oppure
4) se ha due lati opposti congruenti e paralleli.

1) Nel quadrilatero $ABCD$ convesso (fig. 123) supponiamo che sia $AB \cong DC$ e $AD \cong BC$ (ipotesi); diciamo che il quadrilatero è un parallelogrammo (tesi). Infatti, se si traccia la diagonale AC si ottengono i due triangoli ABC, ACD

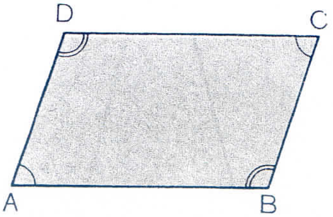

Fig. 124

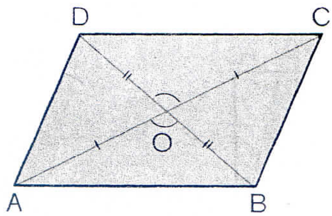

fig. 125

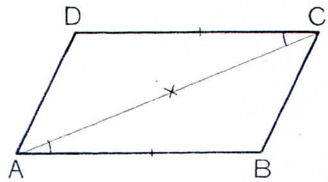

fig. 126

congruenti, perchè hanno i lati ordinatamente congruenti. Allora $\widehat{CAB} \cong \widehat{ACD}$ e $\widehat{DAC} \cong \widehat{ACB}$ e ciò basta per affermare che i lati opposti sono paralleli in virtù del teorema n. 72.

2) Si supponga ora che sia $\hat{A} \cong \hat{C}$ e $\hat{B} \cong \hat{D}$ (fig. 124). Da questa ipotesi risulta $\hat{A} + \hat{B} \cong \hat{C} + \hat{D}$. Ma la somma dei quattro angoli del quadrilatero è uguale a due piatti, perciò ciascuna delle due somme $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{C} + \hat{D}$ sarà uguale a un angolo piatto, ossia gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ oppure $\hat{C}$ e $\hat{D}$ sono supplementari. Da ciò si conclude che le coppie di lati opposti AB, DC e AD, BC sono paralleli, per il teorema n. 72.

3) Si supponga ora di sapere che nel quadrangolo $ABCD$ le diagonali si intersecano in un punto O, tale che sia $OA \cong OC$ e $OB \cong OD$ (fig. 125). Allora siccome $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$, perchè angoli opposti al vertice, i due triangoli AOB, COD sono congruenti per avere due lati e l'angolo compreso ordinatamente congruenti. Ne segue che $\widehat{CAB} \cong \widehat{ACD}$ e analogamente, per la congruenza dei due triangoli BOC e AOD, segue che $\widehat{ADB} \cong \widehat{DBC}$ e se ne conclude che i lati opposti del quadrangolo sono paralleli, sempre in virtù del teorema n. 72.

4) Nel quadrangolo $ABCD$ i due lati AB e CD siano congruenti e paralleli (ipotesi) (fig. 126); dimostriamo che il quadrangolo è un parallelogrammo (tesi).
Infatti, tracciata la diagonale AC, i due triangoli ABC, CDA risultano congruenti, perchè il lato AC è comune, i lati AB, DC congruenti per ipotesi e $\widehat{CAB} \cong \widehat{ACD}$, perchè angoli alterni interni di rette parallele. Perciò $AD \cong BC$ e allora il quadrangolo è un parallelogrammo, perchè ha le coppie di lati opposti congruenti.

Parallelogrammi particolari

109 Un parallelogrammo può avere un angolo retto, ma allora è facile vedere che li ha tutti retti.

Un parallelogrammo avente i quattro angoli retti si dice **rettangolo**.