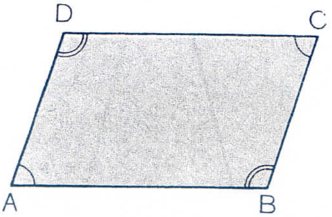

Fig. 124

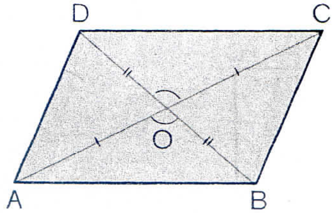

fig. 125

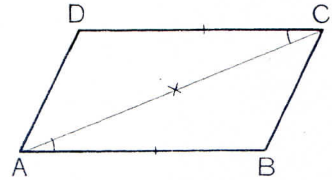

fig. 126

congruenti, perchè hanno i lati ordinatamente congruenti. Allora $\widehat{CAB} \cong \widehat{ACD}$ e $\widehat{DAC} \cong \widehat{ACB}$ e ciò basta per affermare che i lati opposti sono paralleli in virtù del teorema n. 72.

2) Si supponga ora che sia $\widehat{A} \cong \widehat{C}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ (fig. 124). Da questa ipotesi risulta $\widehat{A} + \widehat{B} \cong \widehat{C} + \widehat{D}$. Ma la somma dei quattro angoli del quadrilatero è uguale a due piatti, perciò ciascuna delle due somme $\widehat{A} + \widehat{B}$, $\widehat{C} + \widehat{D}$ sarà uguale a un angolo piatto, ossia gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ oppure $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ sono supplementari. Da ciò si conclude che le coppie di lati opposti AB, DC e AD, BC sono paralleli, per il teorema n. 72.

3) Si supponga ora di sapere che nel quadrangolo $ABCD$ le diagonali si intersecano in un punto O, tale che sia $OA \cong OC$ e $OB \cong OD$ (fig. 125). Allora siccome $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$, perchè angoli opposti al vertice, i due triangoli AOB, COD sono congruenti per avere due lati e l'angolo compreso ordinatamente congruenti. Ne segue che $\widehat{CAB} \cong \widehat{ACD}$ e analogamente, per la congruenza dei due triangoli BOC e AOD, segue che $\widehat{ADB} \cong \widehat{DBC}$ e se ne conclude che i lati opposti del quadrangolo sono paralleli, sempre in virtù del teorema n. 72.

4) Nel quadrangolo $ABCD$ i due lati AB e CD siano congruenti e paralleli (ipotesi) (fig. 126); dimostriamo che il quadrangolo è un parallelogrammo (tesi).
Infatti, tracciata la diagonale AC, i due triangoli ABC, CDA risultano congruenti, perchè il lato AC è comune, i lati AB, DC congruenti per ipotesi e $\widehat{CAB} \cong \widehat{ACD}$, perchè angoli alterni interni di rette parallele. Perciò $AD \cong BC$ e allora il quadrangolo è un parallelogrammo, perchè ha le coppie di lati opposti congruenti.

Parallelogrammi particolari

109 Un parallelogrammo può avere un angolo retto, ma allora è facile vedere che li ha tutti retti.

Un parallelogrammo avente i quattro angoli retti si dice **rettangolo**.

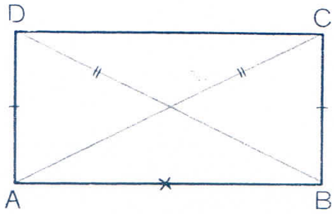

fig. 127

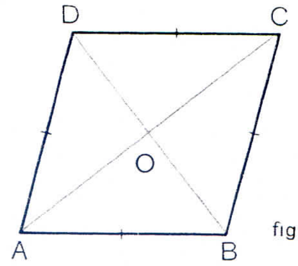

fig. 128

Siccome la somma degli angoli di un quadrangolo convesso è uguale a quattro angoli retti, se tali angoli sono congruenti fra loro ciascuno di essi risulta retto: quindi possiamo dire che un quadrangolo convesso equiangolo è un rettangolo.

110 Poichè il rettangolo è un parallelogrammo, godrà di tutte le proprietà dei parallelogrammi; in più, per esso vale il seguente

TEOREMA **In un rettangolo le diagonali sono congruenti.**

Infatti, nel rettangolo $ABCD$ (fig. 127) si considerino i due triangoli rettangoli ABC, DAB; essi sono congruenti perchè hanno congruenti i cateti e precisamente AB in comune e $BC \cong AD$, perchè lati opposti di un parallelogrammo. Dalla congruenza dei nominati triangoli, si ricava quella delle ipotenuse AC e BD.

TEOREMA (reciproco del precedente) **Un parallelogrammo avente le diagonali congruenti è un rettangolo.**

Sia $ABCD$ un parallelogrammo avente le due diagonali AC, BD congruenti (fig. 127). I due triangoli ABC e DAB sono allora congruenti, perchè hanno i tre lati ordinatamente congruenti. In particolare, risultano congruenti i due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{DAB}$, ma questi sono supplementari perchè adiacenti allo stesso lato AB del parallelogrammo; perciò ognuno di essi è retto e di conseguenza il parallelogrammo dato è un rettangolo.

111 Un parallelogrammo può avere congruenti due lati consecutivi. Allora tutti i lati sono congruenti.

DEFINIZIONE Un parallelogrammo con i quattro lati congruenti si dice **rombo**.

Dal criterio n. 1 (n. 108) scende poi immediatamente che un quadrangolo (convesso) equilatero è un rombo.

112 Naturalmente anche il rombo gode di tutte le proprietà dei parallelogrammi; per di più vale il seguente

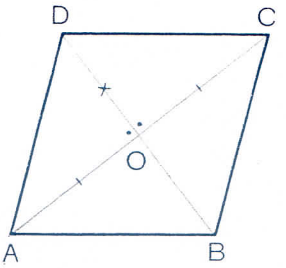

fig. 129

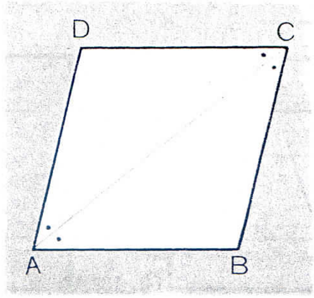

fig. 130

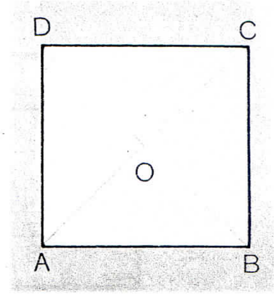

fig. 131

TEOREMA In un rombo le diagonali sono perpendicolari fra loro e sono le bisettrici degli angoli.

Sia $ABCD$ un rombo (fig. 128); AC e BD le due diagonali intersecantisi nel punto O. Si consideri il triangolo ADC, che risulta isoscele: in esso DO è la mediana relativa alla base AC (perchè le diagonali di un parallelogrammo si bisecano scambievolmente). Ma in un triangolo isoscele la mediana è pure altezza e bisettrice dell'angolo al vertice (n. 69), perciò DO è perpendicolare ad AC ed è bisettrice dell'angolo $\widehat{ADC}$. Per la stessa ragione BD biseca l'angolo $\widehat{ABC}$ e la diagonale AC è bisettrice degli angoli $\widehat{DAB}$ e $\widehat{BCD}$.

113 TEOREMA (reciproco del precedente) **Un parallelogrammo è un rombo**

1) se le diagonali sono perpendicolari, oppure

2) se un angolo è diviso per metà dalla diagonale uscente dal suo vertice.

1) Nel parallelogrammo $ABCD$, le due diagonali AC, BD siano perpendicolari in O (fig. 129). I due triangoli rettangoli AOD, COD sono congruenti avendo i cateti rispettivamente congruenti. Infatti il lato DO è in comune e, inoltre, è $OA \cong OC$ perchè O è punto medio della diagonale AC del parallelogrammo. Dalla congruenza dei nominati triangoli si deduce quella delle ipotenuse AD, DC e perciò il parallelogrammo avendo due lati consecutivi congruenti, è un rombo.

2) Nel parallelogrammo $ABCD$ la diagonale AC sia bisettrice dell'angolo in A (fig. 130) e quindi sia $\widehat{BAC} \cong \widehat{CAD}$. Ma $\widehat{BAC} \cong \widehat{ACD}$, perchè angoli alterni interni delle rette parallele AB, DC rispetto alla trasversale AC. Allora il triangolo ACD avendo due angoli congruenti è isoscele sulla base AC: si ha dunque $AD \cong DC$ e perciò il parallelogrammo è un rombo.

114 Dicesi **quadrato** un quadrangolo equilatero ed equiangolo.

Un quadrato è insieme rettangolo e rombo e perciò gode di tutte le proprietà dei rettangoli e dei rombi (fig. 131); si ha così il seguente

TEOREMA Le diagonali di un quadrato sono congruenti, perpendicolari fra loro e bisettrici degli angoli. Viceversa un parallelogrammo è un quadrato se in esso le diagonali sono congruenti e perpen-

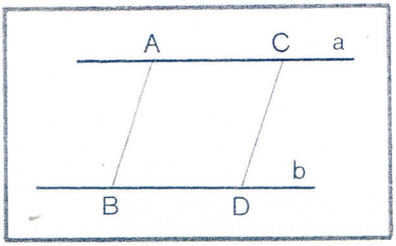

fig. 132

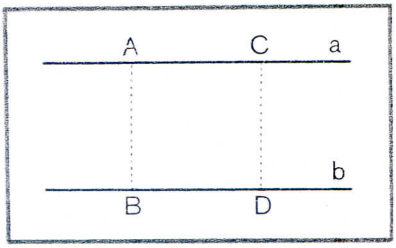

fig. 133

dicolari oppure se le diagonali sono congruenti e un angolo è diviso per metà dalla diagonale che passa per il suo vertice.

Distanza di due rette parallele

115 TEOREMA **Segmenti paralleli compresi fra rette parallele sono congruenti fra loro.**

Siano a, b due rette parallele (fig. 132): se AB, CD sono due segmenti paralleli compresi fra a e b, diciamo che $AB \cong DC$. Infatti, il quadrangolo $ABCD$ è un parallelogrammo, di cui AB, CD sono lati opposti e quindi congruenti.

116 OSSERVAZIONE Il lemma del n. 101 rientra, come caso particolare, nel teorema precedente e giustifica la seguente

DEFINIZIONE Si dice **distanza di due rette parallele** la distanza di un punto qualsiasi di una di esse dall'altra.

117 Segue che la distanza di due rette parallele a e b è rappresentata dal segmento di una qualunque comune perpendicolare compresa fra le rette a e b (fig. 133).

118 In ogni parallelogrammo la distanza di due lati opposti si chiama **altezza** del parallelogrammo rispetto ad uno di tali lati assunto come base.

In ogni trapezio si chiama *altezza* la distanza delle due basi.

Trasversali di un fascio di rette parallele

119 DEFINIZIONE L'insieme di tutte le rette di un piano parallele ad una retta data si chiama **fascio di rette parallele.**

OSSERVAZIONE È noto che anche l'insieme di tutte le rette di un piano passanti per un punto O si chiama *fascio di rette* di centro O. Per distinguere i due enti omonimi il fascio di centro O si chiama *fascio* **proprio** *di rette*; l'altro *fascio* **improprio**.