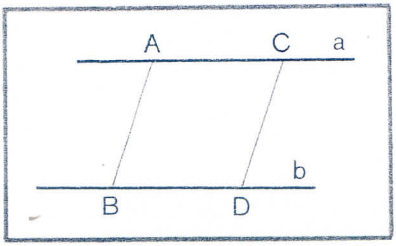


fig. 132

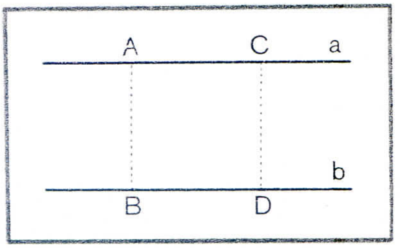


fig. 133

dicolari oppure se le diagonali sono congruenti e un angolo è diviso per metà dalla diagonale che passa per il suo vertice.

Distanza di due rette parallele

115 TEOREMA Segmenti paralleli compresi fra rette parallele sono congruenti fra loro.

Siano a, b due rette parallele (fig. 132): se AB, CD sono due segmenti paralleli compresi fra a e b, diciamo che $AB \cong DC$. Infatti, il quadrangolo $ABCD$ è un parallelogrammo, di cui AB, CD sono lati opposti e quindi congruenti.

116 OSSERVAZIONE Il lemma del n. 101 rientra, come caso particolare, nel teorema precedente e giustifica la seguente

DEFINIZIONE Si dice **distanza di due rette parallele** la distanza di un punto qualsiasi di una di esse dall'altra.

117 Segue che la distanza di due rette parallele a e b è rappresentata dal segmento di una qualunque comune perpendicolare compresa fra le rette a e b (fig. 133).

118 In ogni parallelogrammo la distanza di due lati opposti si chiama **altezza** del parallelogrammo rispetto ad uno di tali lati assunto come base.
In ogni trapezio si chiama *altezza* la distanza delle due basi.

Trasversali di un fascio di rette parallele

119 DEFINIZIONE L'insieme di tutte le rette di un piano parallele ad una retta data si chiama **fascio di rette parallele**.

OSSERVAZIONE È noto che anche l'insieme di tutte le rette di un piano passanti per un punto O si chiama *fascio di rette* di centro O. Per distinguere i due enti omonimi il fascio di centro O si chiama *fascio* **proprio** *di rette*; l'altro *fascio* **improprio**.

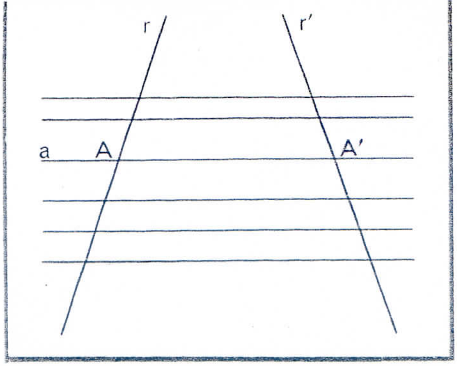


fig. 134

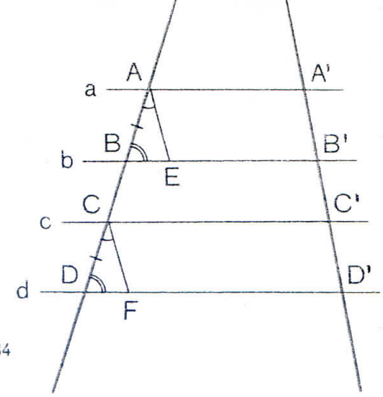


fig. 135

120 Una retta r, che interseca una retta del fascio improprio, interseca tutte le altre (Cor. 3, n. 74) e si chiama *trasversale* del fascio.

Un fascio di rette parallele sia tagliato da due trasversali r, r' (fig. 134); tra i punti di r e r' stabiliamo la seguente corrispondenza, che indichiamo con Σ: ad un punto A di r *corrisponde* un punto A' di r' se A e A' appartengono alla medesima retta a del fascio.

Tale corrispondenza è manifestamente biunivoca. Rappresenteremo, simbolicamente la situazione ora illustrata nel seguente modo:

$$A \overset{\Sigma}{\longleftrightarrow} A'$$

che si legge *A e A' si corrispondono biunivocamente in Σ.*

Diremo, poi, che due segmenti AB e $A'B'$ (considerati come insiemi di punti), appartenenti rispettivamente ad r e r', si corrispondono in Σ se gli estremi di questi segmenti sono coppie di punti corrispondenti.

121 TEOREMA

1) Nella corrispondenza Σ a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.

2) Ad un segmento sull'una, che è somma di due altri segmenti, corrisponde un segmento che è somma dei corrispondenti sull'altra.

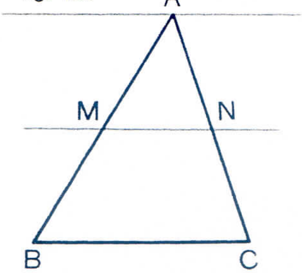
Questo teorema si enuncia più brevemente così: *la corrispondenza Σ conserva la congruenza e la somma.*

Le quattro rette a, b, c, d di un fascio di parallele vengano tagliate dalle trasversali r e r' nei punti A, B, C, D e nei corrispondenti A', B', C', D' (fig. 135) e sia $AB \cong CD$ (ipotesi); diciamo che $A'B' \cong C'D'$ (tesi).

Se le due rette r e r' sono parallele il teorema è evidente, come immediata conseguenza del n. 115. Se ciò non è, si conducano da A e C le parallele AE, CF alla r', che risultano perciò parallele fra loro.

Si noti ora che i triangoli ABE, CDF vengono ad essere congruenti per avere un lato e gli angoli adiacenti ordinatamente congruenti. Infatti, $AB \cong CD$ per ipotesi; $\widehat{BAE} \cong \widehat{DCF}$ perchè angoli corrispondenti formati dalle parallele AE, CF e la trasversale r; $\widehat{ABE} \cong \widehat{CDF}$ perchè angoli corrispondenti rispetto alle parallele b, d e la trasversale r. Dalla congruenza dei due triangoli scende $AE \cong CF$;

fig. 136



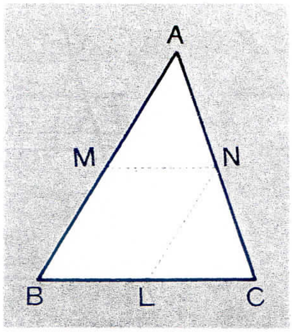
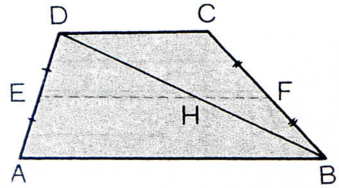


fig. 137

fig. 138



ma $AE \cong A'B'$ e $CF \cong C'D'$, perchè segmenti paralleli compresi fra rette parallele, perciò $A'B' \cong C'D'$.

Per la dimostrazione della seconda parte del teorema, si osservi che al punto B, interno al segmento AC della trasversale r, corrisponde il punto B' interno al segmento $A'C'$ della trasversale r'; e poichè al segmento AC corrisponde il segmento $A'C'$, risulta che alla somma dei segmenti AB, BC di r corrisponde la somma dei segmenti corrispondenti $A'B'$, $B'C'$ di r'.

122 COROLLARIO Se per il punto di mezzo di un lato di un triangolo si conduce la parallela ad un altro lato, questa dimezza il lato rimanente.

Nel triangolo ABC per il punto medio M del lato AB si tracci la parallela MN al lato BC: diciamo che è $AN \cong NC$ (fig. 136).

Infatti, dal vertice A si conduca la parallela al lato BC: si ottiene con ciò un fascio di parallele tagliate dalle due trasversali AB, AC ed essendo, per ipotesi $AM \cong MB$, sarà pure $AN \cong NC$.

123 TEOREMA In un triangolo qualunque il segmento congiungente i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.

Nel triangolo ABC (fig. 137) si congiungano i punti di mezzo M, N dei lati AB, AC; diciamo che MN è parallela a BC e congruente alla sua metà. Infatti, se da M si conduce la parallela a BC, questa incontra il lato AC nel suo punto di mezzo (n. 122) e ciò vuol dire appunto che MN è parallela a BC.

Per dimostrare ora che $MN \cong \frac{1}{2} BC$, si conduca da N la parallela al lato AB, che taglierà BC nel punto di mezzo L. Ma $MN \cong BL$ come segmenti paralleli compresi fra rette parallele, perciò MN è la metà di BC.

124 TEOREMA In un trapezio la congiungente i punti di mezzo dei lati non paralleli è parallela alle due basi ed uguale alla loro semisomma.

Sia $ABCD$ un trapezio (fig. 138); E ed F i punti medi dei lati obliqui AD e BC (ipotesi). Congiunto E con F, si vuol dimostrare che EF è parallela alle basi e che $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$ (tesi).

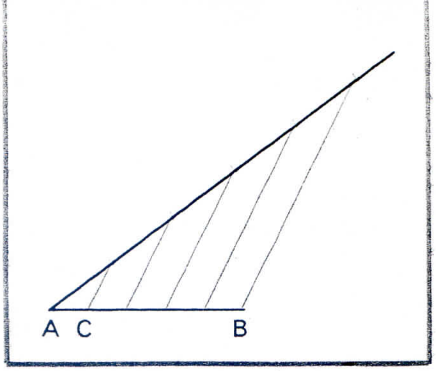


fig. 139

Per il teorema n. 121, la parallela alle basi condotta dal punto medio E di AD, deve tagliare il lato BC per metà, quindi deve coincidere con il segmento EF, che risulta perciò parallelo alle basi. Conduciamo la diagonale BD, per il teorema precedente, avremo: nel triangolo ABD

$$EH \cong \tfrac{1}{2}\, AB,$$

nel triangolo DBC

$$HF \cong \tfrac{1}{2}\, DC.$$

Sommando membro a membro

$$EH + HF = \tfrac{1}{2}\, AB + \tfrac{1}{2}\, DC$$

cioè

$$EF = \tfrac{1}{2}\, (AB + DC).$$

125 TEOREMA Esiste il sottomultiplo di un segmento secondo un numero n naturale arbitrario.

Sia AB il segmento dato e sia, per esempio, $n = 5$ (fig. 139). Dall'estremo A si tiri una semiretta arbitraria e su di essa, a partire da A, si portino cinque segmenti consecutivi congruenti fra loro. Si unisca l'estremo dell'ultimo segmento con B e dagli altri estremi si conducano le parallele alla congiungente tracciata. Queste parallele tagliano il segmento AB in cinque parti congruenti; ciò è una immediata conseguenza del teorema del n. 121.

Il segmento AC è il sottomultiplo di AB secondo il numero 5.