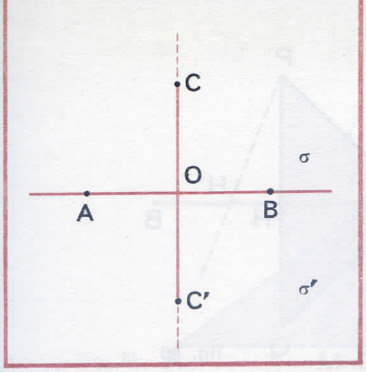

fig. 78

CAPITOLO III

Rette perpendicolari e rette parallele

Rette perpendicolari

63 La nozione di angolo retto, come metà di un angolo piatto, è familiare già dallo studio della geometria intuitiva, e familiare ne è la costruzione, per esempio, mediante la squadra.

Qui vogliamo occuparci di stabilire concettualmente l'esistenza di tali angoli, e lo faremo dimostrando che *ci sono coppie di rette che intersecandosi formano quattro angoli congruenti*. Ciascuno di questi angoli si chiamerà, per definizione, angolo **retto**. Essi coincidono con gli angoli già definiti al n. 37.

Consideriamo dunque una retta AB di un piano (fig. 78) e un punto C del medesimo, non appartenente ad essa. Il movimento che sovrappone il semipiano σ al semipiano σ', e lascia ferma la retta AB (**ribaltamento** di σ attorno ad AB), genera fra i punti di σ e σ' una corrispondenza biunivoca che sappiamo essere una congruenza.

Il segmento, e quindi la retta, che congiunge il punto C con il suo corrispondente C' incontra (postulato n. 14) la retta AB nel punto O.

Seguono le relazioni di congruenza:

$$\widehat{AOC} \cong \widehat{AOC'}$$

$$\widehat{BOC} \cong \widehat{BOC'}$$

D'altra parte è:

$$\widehat{AOC'} \cong \widehat{BOC}$$

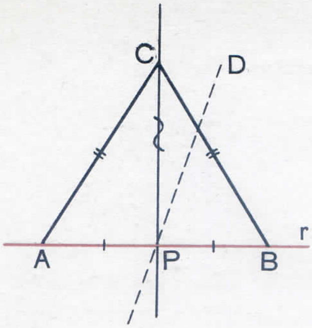

fig. 79

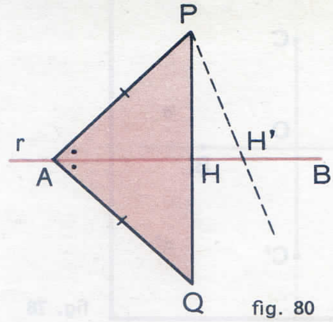

fig. 80

perchè opposti al vertice; quindi, per la proprietà transitiva della congruenza, si ha:

$$\widehat{AOC} \cong \widehat{AOC'} \cong \widehat{BOC} \cong \widehat{BOC'}.$$

64 Il teorema ora visto ci permette di enunciare le seguenti

DEFINIZIONI Due rette che intersecandosi formano quattro angoli congruenti si dicono **perpendicolari** (l'una all'altra nel loro punto d'intersezione). Si usa di frequente il simbolo « $\perp$ », che si legge **perpendicolare a**.

Due rette che si intersecano e non sono perpendicolari si dicono **oblique** l'una all'altra.

Si dà pure il nome di perpendicolari od oblique anche a parti di rette perpendicolari od oblique.

65 TEOREMA In un piano, per un punto dato passa una e una sola retta perpendicolare a una retta data.

Se r è la retta e P il punto dato, possono presentarsi due casi.

1) Il punto P sta sulla retta r (fig. 79).

Si prendano sulla retta r, da bande opposte di P, due segmenti congruenti PA, PB e sulla base AB si costruisca il triangolo isoscele ABC; indi si unisca C con P: diciamo che la retta CP è perpendicolare alla r. Infatti, i due triangoli ACP, BCP risultano congruenti perchè hanno i tre lati rispettivamente congruenti: sono perciò congruenti i due angoli adiacenti $\widehat{CPA}$ e $\widehat{CPB}$ (opposti a lati congruenti) e ciò basta ad affermare che la retta CP è perpendicolare ad r.

Ogni altra retta condotta per P, come la PD, forma con AB angoli adiacenti disuguali e perciò è obliqua ad AB. Pertanto la retta CP è l'unica perpendicolare alla retta r condotta per P.

2) Il punto P è fuori della retta r (fig. 80).

L'esistenza di una retta per P, perpendicolare ad AB, è stata dimostrata nelle considerazioni fatte all'inizio di queste capitolo. Vediamone ora l'unicità.

Qualunque altra retta passante per P e che incontri la r in un punto H' (diverso

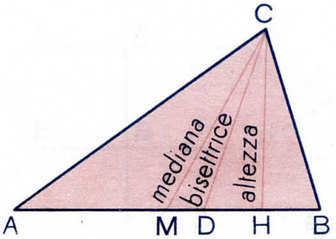

fig. 81

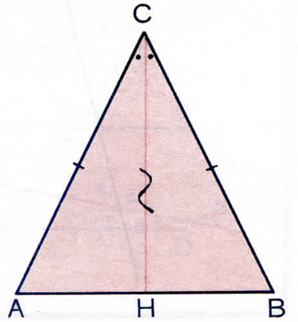

fig. 82

da H) non può essere perpendicolare alla r, perchè altrimenti il triangolo PHH' avrebbe due angoli retti, mentre ciò non può accadere (n. 61). Il punto d'intersezione della retta r con la perpendicolare ad essa condotta per un punto P si chiama **piede** della perpendicolare.

66 DEFINIZIONE Si chiama **distanza** fra un punto e una retta il segmento di perpendicolare condotto alla retta dal punto.

Altezze, mediane, bisettrici di un triangolo

67 DEFINIZIONI In un triangolo qualunque il segmento di perpendicolare condotto da un vertice alla retta del lato opposto e da questa limitato si chiama **altezza** relativa a quel vertice o a quel lato (che in tal caso si considera come *base* del triangolo).

Si chiama invece **mediana** *relativa ad un dato lato* il segmento che unisce il punto medio del lato col vertice opposto.

Si chiama infine **bisettrice** *relativa ad un dato vertice* il segmento che biseca l'angolo che ha il dato vertice e termina al lato opposto.

Ogni triangolo ha tre altezze, tre mediane e tre bisettrici.

Proprietà del triangolo isoscele

68 Il triangolo isoscele oltre ad avere due lati congruenti e due angoli congruenti possiede altre rimarchevoli proprietà.

TEOREMA In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è altezza e mediana relativa alla base.

Sia ABC il triangolo isoscele di base AB (fig. 82). Conduciamo la bisettrice CH dell'angolo al vertice C e confrontiamo i due triangoli AHC, BHC. Essi hanno il lato CH in comune. $AC \cong BC$ perchè lati di un triangolo isoscele e

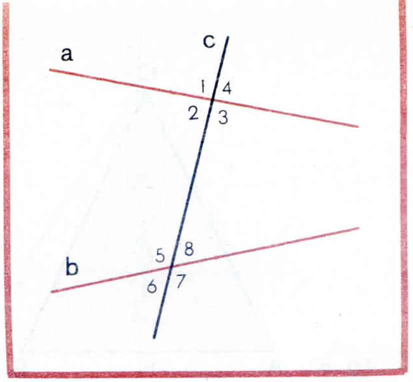

fig. 83

$\widehat{ACH} \cong \widehat{BCH}$ per ipotesi: i due triangoli sono quindi congruenti (I Criterio), perciò si ha $AH \cong HB$, cioè la bisettrice CH coincide con la mediana relativa alla base.

Risulta poi $\widehat{AHC} \cong \widehat{BHC}$: ma questi due angoli sono adiacenti, perciò sono retti, e se ne conclude che CH è l'altezza del triangolo isoscele relativa alla base AB.

69 Con procedimento analogo si dimostra che:

In un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è pure altezza e bisettrice dell'angolo al vertice.

Rette tagliate da una trasversale

70 Due rette di uno stesso piano formano con una trasversale (cioè con una retta che le tagli in due punti distinti) otto angoli che hanno a due a due nomi particolari. Con riferimento alla fig. 83,

gli angoli 2 e 8 oppure 3 e 5 si dicono **alterni interni**,
4 e 6 oppure 1 e 7 si dicono **alterni esterni**,
1 e 5 oppure 2 e 6; 4 e 8; 3 e 7 si dicono **corrispondenti**,
2 e 5 oppure 3 e 8 si dicono **coniugati interni**,
1 e 6 oppure 4 e 7 si dicono **coniugati esterni.**

Rette parallele

71 DEFINIZIONE Due rette di uno stesso piano che non hanno alcun punto in comune si dicono **parallele.***

* Per indicare che due rette a e b sono parallele si scrive $a \parallel b$.