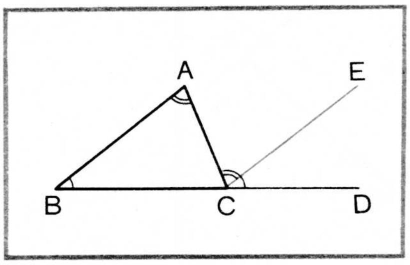

fig. 97

CAPITOLO IV

# Relazioni fra gli elementi dei poligoni

## Somma degli angoli di un triangolo e di un poligono qualunque

**76** Per brevità, talora indicheremo gli angoli interni $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ di un triangolo con le lettere greche $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ e i lati ad essi opposti rispettivamente con $a$, $b$, $c$.

**TEOREMA** **In ogni triangolo un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti.**

Sia $ABC$ un triangolo qualunque (fig. 97) e di esso si consideri l'angolo esterno $\widehat{ACD}$ (ipotesi); si tratta di dimostrare che $\widehat{ACD} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC}$ (tesi).

Infatti, dal punto $C$ si conduca la retta $CE$ parallela al lato $AB$ e si considerino i due angoli in cui tale retta divide l'angolo esterno $\widehat{ACD}$. Gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACE}$ risultano congruenti perchè alterni interni rispetto alle parallele $AB$, $CE$ e la trasversale $AC$, e così pure risultano congruenti gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{ECD}$ perchè corrispondenti rispetto alle stesse parallele e la trasversale $BD$, onde si deduce che la somma di $\widehat{BAC}$ e $\widehat{ABC}$ è uguale alla somma di $\widehat{ACE}$ e $\widehat{ECD}$, cioè all'angolo $\widehat{ACD}$.

**77** Da questo Teorema, che *contiene* manifestamente quello dimostrato nel n. 60, si deduce immediatamente la seguente proposizione fondamentale:

**TEOREMA** **La somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto.**

Infatti, nel triangolo $ABC$ (fig. 97) la somma degli angoli interni $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ è uguale all'angolo esterno $\widehat{ACD}$ per il Teorema precedente; perciò la som-

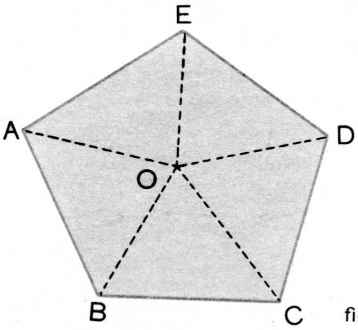

fig. 98

ma dei tre angoli interni $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ è uguale alla somma dell'angolo $\widehat{ACD}$ e del suo adiacente $\widehat{ACB}$, cioè appunto ad un angolo piatto.

OSSERVAZIONE Da questo teorema si possono dedurre due proposizioni già dimostrate indipendentemente dal postulato delle parallele: la prima è il teorema dell'angolo esterno (n. 60), la seconda il suo immediato corollario (n. 61).

Osserviamo invece che il teorema ora dimostrato **dipende** dal postulato di Euclide. Se si rinuncia a questo postulato, cessa di essere *vera* quest'ultima proposizione, vera nel senso di essere deducibile logicamente dalle proposizioni precedenti (le prime due, invece, continuano ad esserlo).

**78 COROLLARIO 1 Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari.**

**COROLLARIO 2 In ogni triangolo equilatero ciascun angolo è uguale alla terza parte di angolo piatto, cioè a due terzi di un angolo retto.**

**COROLLARIO 3 Se due triangoli hanno due angoli rispettivamente congruenti, hanno congruenti anche gli angoli rimanenti.**

79 A questo punto si può generalizzare il II Criterio di congruenza dei triangoli, enunciandolo nel modo seguente:

*Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un lato e due angoli.*

**80 TEOREMA La somma degli angoli interni di un poligono convesso è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono meno due.**

Unendo tutti i vertici di un poligono convesso di $n$ lati con un punto qualunque O interno al poligono (fig. 98), si ottengono tanti triangoli quanti sono i lati del poligono, cioè $n$ triangoli. La somma degli angoli del poligono è allora manifestamente uguale alla differenza *fra* la somma degli angoli di tutti i triangoli costruiti *e* quella degli angoli che hanno il vertice in O. Ma la prima somma è uguale a $n$ piatti, la seconda a due piatti, quindi la somma cercata è uguale ad $n - 2$ angoli piatti, cioè tanti piatti quanti sono i lati del poligono meno due.

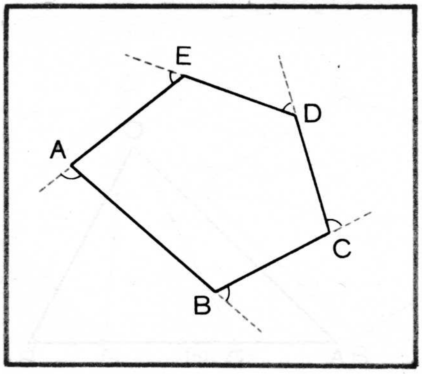


fig. 99

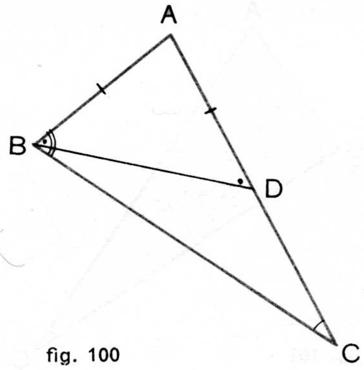


fig. 100

**COROLLARIO Se un poligono di n lati è equiangolo, ciascuno dei suoi angoli è uguale a (n — 2)/n di angolo piatto.**

**81 TEOREMA La somma degli angoli esterni di un poligono convesso è sempre uguale a due angoli piatti.**

Infatti, per avere gli angoli esterni del poligono in un certo ordine, si percorra il suo contorno in un dato verso e nello stesso verso si prolunghi ogni lato del poligono come mostra la fig. 99. Ogni angolo esterno è adiacente ad un angolo interno del poligono, perciò se $n$ è il numero dei lati, la somma degli angoli esterni e di quelli interni è uguale a $n$ angoli piatti. Ricordando il risultato del teorema n. 80, si deduce che la somma degli angoli esterni è uguale a $n - (n - 2) = 2$ angoli piatti.

**COROLLARIO Nessun poligono convesso può avere più di tre angoli acuti.**

Infatti, se gli angoli acuti fossero quattro o più di quattro, i loro angoli esterni adiacenti sarebbero ottusi e la somma degli angoli esterni sarebbe maggiore di due angoli piatti.

## Diseguaglianze fra elementi di un triangolo o di un poligono

**82 TEOREMA** (contrario* del n. 49) **Se un triangolo ha due lati diseguali, ha pure diseguali gli angoli opposti e precisamente diseguali nello stesso senso.**

Nel triangolo $ABC$ (fig. 100) sia $AC > AB$ (ipotesi); diciamo che l'angolo $\widehat{ABC}$ (opposto al lato $AC$) è maggiore dell'angolo $\widehat{ACB}$ (opposto al lato $AB$) (tesi).

Consideriamo sul lato maggiore $AC$ il punto $D$ tale che sia $AD \cong AB$ e con-

---

* Ricordiamo che se nell'enunciato di un teorema si cambia l'ipotesi e la tesi nelle loro contrarie, si può avere un altro teorema che si dice *contrario* od *opposto* al primitivo.