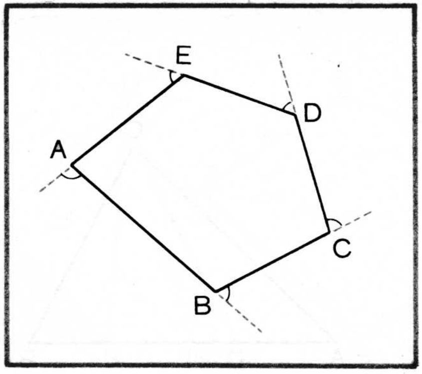


fig. 99

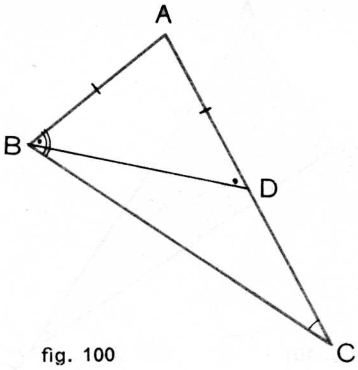


fig. 100

COROLLARIO Se un poligono di n lati è equiangolo, ciascuno dei suoi angoli è uguale a (n — 2)/n di angolo piatto.

81 TEOREMA La somma degli angoli esterni di un poligono convesso è sempre uguale a due angoli piatti.

Infatti, per avere gli angoli esterni del poligono in un certo ordine, si percorra il suo contorno in un dato verso e nello stesso verso si prolunghi ogni lato del poligono come mostra la fig. 99. Ogni angolo esterno è adiacente ad un angolo interno del poligono, perciò se n è il numero dei lati, la somma degli angoli esterni e di quelli interni è uguale a n angoli piatti. Ricordando il risultato del teorema n. 80, si deduce che la somma degli angoli esterni è uguale a $n - (n - 2) = 2$ angoli piatti.

COROLLARIO Nessun poligono convesso può avere più di tre angoli acuti.

Infatti, se gli angoli acuti fossero quattro o più di quattro, i loro angoli esterni adiacenti sarebbero ottusi e la somma degli angoli esterni sarebbe maggiore di due angoli piatti.

Diseguaglianze fra elementi di un triangolo o di un poligono

82 TEOREMA (contrario* del n. 49) Se un triangolo ha due lati diseguali, ha pure diseguali gli angoli opposti e precisamente diseguali nello stesso senso.

Nel triangolo ABC (fig. 100) sia $AC > AB$ (ipotesi); diciamo che l'angolo $\widehat{ABC}$ (opposto al lato AC) è maggiore dell'angolo $\widehat{ACB}$ (opposto al lato AB) (tesi).

Consideriamo sul lato maggiore AC il punto D tale che sia $AD \cong AB$ e con-

* Ricordiamo che se nell'enunciato di un teorema si cambia l'ipotesi e la tesi nelle loro contrarie, si può avere un altro teorema che si dice *contrario* od *opposto* al primitivo.

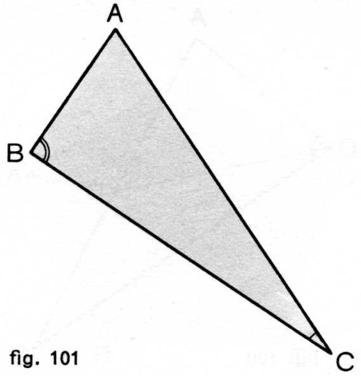


fig. 101

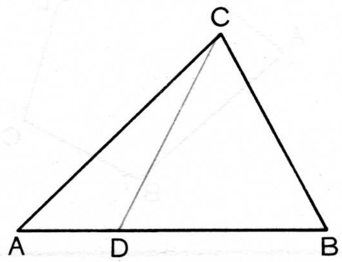


fig. 102

giungiamo B con D: otteniamo così il triangolo isoscele ABD e risulterà perciò $\widehat{ABD} \cong \widehat{ADB}$. Ma $\widehat{ADB}$ è un angolo esterno del triangolo BCD e come tale maggiore dell'angolo $\widehat{DCB}$ interno al triangolo e non adiacente, quindi anche $\widehat{ABD}$ (che è congruente ad $\widehat{ADB}$) sarà maggiore di $\widehat{DCB}$. Ma l'angolo $\widehat{ABC}$ è maggiore di $\widehat{ABD}$, perciò è pure maggiore di $\widehat{ACB}$.

83 TEOREMA (reciproco del n. 82 e contrario del n. 51) **Se un triangolo ha due angoli disuguali ha pure disuguali i lati opposti e precisamente nello stesso senso.**

Nel triangolo ABC sia $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ (ipotesi); diciamo che il lato AC è maggiore del lato AB (fig. 101) (tesi).

Infatti, non può essere $AC \cong AB$, perchè altrimenti gli angoli opposti $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ sarebbero congruenti contro il supposto e non può essere $AC < AB$, perchè allora sarebbe $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$ per il teorema precedente, il che è pure in contrasto con l'ipotesi. Si deve dunque concludere che è $AC > AB$.

84 COROLLARIO 1 **In ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascuno dei due cateti.**

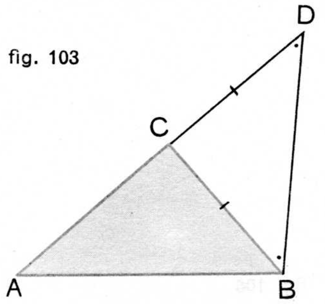
85 COROLLARIO 2 **In ogni triangolo ottusangolo il lato opposto all'angolo ottuso è maggiore di ciascuno degli altri due lati.**

86 TEOREMA **In ogni triangolo, il segmento congiungente un vertice con un punto del lato opposto è minore di uno almeno degli altri due.**

Nel triangolo ABC (fig. 102), diciamo che il segmento CD, che unisce il vertice C con il punto D del lato opposto, è minore di uno almeno dei lati CA e CB.

Infatti, se i due angoli $\widehat{ADC}$, $\widehat{BDC}$ sono congruenti e quindi retti, allora CD è minore di ambedue i segmenti CA e CB per il Cor. n. 84. Se invece i due angoli nominati sono diversi, allora uno di essi sarà ottuso: se tale è l'angolo $\widehat{ADC}$, come in fig. 102, allora AC è maggiore di CD per il Cor. n. 85.

fig. 103



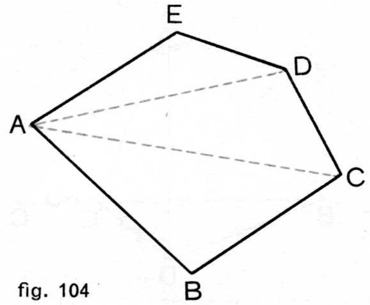


fig. 104

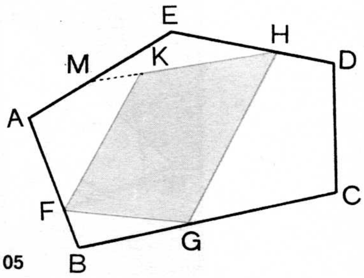


fig. 105

87 TEOREMA **In un triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due ed è maggiore della loro differenza.**

1) Sia dato il triangolo ABC (ipotesi) e si voglia dimostrare che il lato maggiore AB è minore della somma degli altri due lati AC e CB (tesi) (fig. 103).

Si prolunghi il lato AC di un segmento CD congruente a CB; indi si congiunga B con D. Il triangolo CBD è isoscele e perciò $\widehat{CBD} \cong \widehat{BDC}$. Ora, l'angolo $\widehat{ABD}$ è maggiore di $\widehat{CBD}$, perchè è una sua parte; quindi $\widehat{ABD} > \widehat{CDB}$; perciò, considerando il triangolo ABD, in virtù del teorema n. 83, risulterà $AB < AD$. Ma

$$AD = AC + CD = AC + CB;$$

perciò

$$AB < AC + CB.$$

2) Dimostriamo ora che è $AB > AC - BC$, supposto $AC > BC$.
Infatti, essendo per la prima parte

$$AB + BC > AC,$$

sottraendo BC da ambo i membri della disuguaglianza, si ottiene

$$AB > AC - BC.$$

88 Ci limitiamo ad enunciare i seguenti teoremi relativi a proprietà di poligoni illustrati dalle figure 104–105.

TEOREMA **In ogni poligono ciascun lato è minore della somma di tutti gli altri.**

TEOREMA **Il perimetro di un poligono convesso è maggiore del perimetro di qualunque altro poligono convesso che sia contenuto nel primo.**