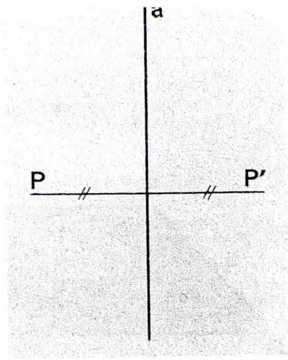


fig. 140

CAPITOLO VI

Luoghi geometrici e punti notevoli di un triangolo

Simmetria assiale

126 È noto dalla geometria intuitiva che una circonferenza è costituita da tutti e soli i punti del suo piano, aventi una distanza determinata da un punto O del piano medesimo.

La locuzione *aventi una distanza determinata da un punto* O esprime una proprietà geometrica comune a tutti i punti della circonferenza. Questa proprietà è comune anche ai punti di un arco della medesima circonferenza, ma non è loro proprietà esclusiva.

A sottolineare la circostanza che la proprietà enunciata è di **tutti e soli** i punti della circonferenza, si introduce per tale circonferenza la denominazione di **luogo**. Analoga denominazione s'introduce per tutte le figure ai cui punti e ad essi soltanto venga riconosciuta una determinata proprietà geometrica.

127 Avviamoci a considerare alcuni di tali luoghi.

A tale scopo introduciamo un secondo notevole esempio di simmetria, dopo quello, già visto, di simmetria centrale.

Fissata in un piano α una retta a, due punti P e P' di α si dicono **simmetrici rispetto ad** a, se a è perpendicolare al segmento PP' nel suo punto medio (fig. 140). La relazione fra i punti del piano, che nasce associando ad ogni punto P di α il suo simmetrico, è una particolare corrispondenza che si chiama **simmetria del piano rispetto all'asse** a, oppure **simmetria assiale**.

Anche per la simmetria assiale è manifesto il carattere di biunivocità che abbiamo visto per quella centrale. È anche immediato il significato di **figure** F,

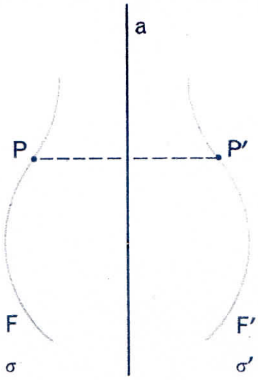


fig. 141

fig. 142

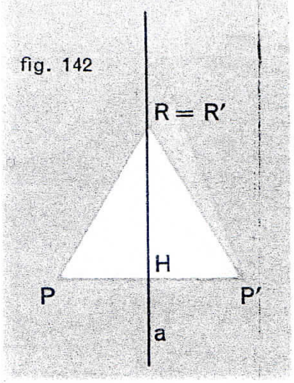
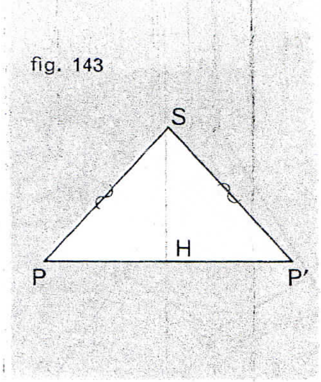


fig. 143



F' **simmetriche rispetto ad** a (fig. 141), come pure il significato di **asse di simmetria** riferito ad una figura F.

Una figura F e la sua simmetrica F', rispetto ad una retta a, formano una nuova figura che ha per asse di simmetria la retta a.

128 Con riguardo alla fig. 140, la retta a è asse di simmetria del segmento PP', perchè la simmetria rispetto ad a *muta* (*trasforma*) PP' in se stesso.

La relazione di simmetria assiale fra due figure è una relazione di congruenza, che si può immaginare realizzata nel modo più semplice con il movimento che sovrappone il semipiano σ al semipiano σ' (fig. 141), lasciando fermo l'asse a; tale movimento, come è noto, si chiama **ribaltamento** di σ **attorno ad** a.

Nella simmetria rispetto all'asse a, un punto di a coincide con il suo simmetrico; un tale punto si dice punto **unito** nella simmetria. I punti dell'asse sono i soli punti uniti nella simmetria. Infatti un punto S fuori dell'asse ha il suo simmetrico da parte opposta. Anche una retta perpendicolare ad a ha se stessa come corrispondente nella simmetria e per tale motivo si chiama retta **unita**; tale attributo si riferisce alla retta come ad un tutto, non ai suoi punti. L'unica retta unita, formata di punti uniti, è l'asse di simmetria.

Luoghi geometrici

129 TEOREMA I punti dell'asse di un segmento ed essi soltanto sono equidistanti dagli estremi P, P′ del segmento.

Infatti (fig. 142), se R è un generico punto dell'asse, i segmenti RP, RP' si corrispondono nella simmetria di asse a e quindi sono congruenti. Viceversa (fig. 143), se SP è congruente a SP', HS — mediana del triangolo isoscele SPP' — è anche altezza; quindi la retta HS è l'asse del segmento PP'.

L'asse di un segmento è quindi il primo importante esempio di luogo geometrico.

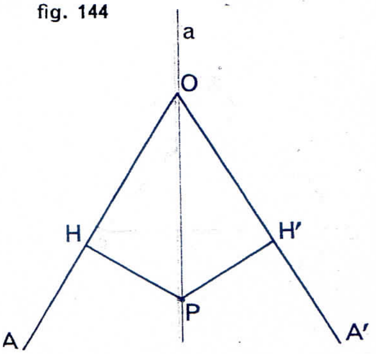


fig. 144

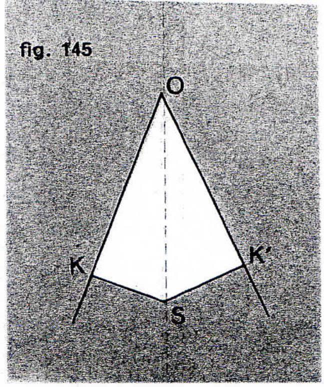


fig. 145

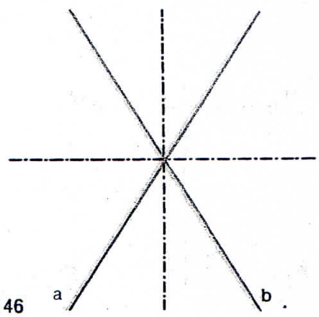


fig. 146

130 Consideriamo ora (fig. 144), un angolo (convesso) $\widehat{AOA'}$ e la retta *a* sostegno della sua bisettrice. La retta *a* è manifestamente asse di simmetria dell'angolo. In tale simmetria, alla distanza *PH* di un punto *P* del raggio bisettore *OP* dal lato *OA*, corrisponde *PH'*, distanza di *P* dal lato *OA'*.

Ecco, quindi, una proprietà comune a tutti i punti del raggio bisettore di $\widehat{AOA'}$: essere equidistanti da *OA* e *OA'*. Sono soltanto essi a godere di tali proprietà? Se (fig. 145) $SK \cong SK'$, i due triangoli *SKO*, *SK'O*, rettangoli in *K* e *K'*, avendo l'ipotenusa *OS* in comune e *SK*, *SK'* congruenti, risultano congruenti. Quindi: $\widehat{KOS} \cong K'OS$; allora *OS* è bisettrice.

Pertanto è vero il seguente

TEOREMA **I punti della bisettrice di un angolo convesso ed essi soltanto sono equidistanti dai lati dell'angolo.**

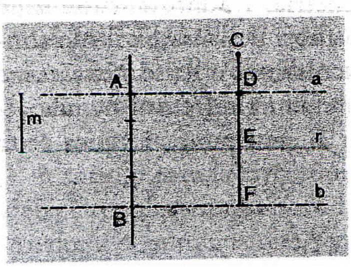


fig. 147

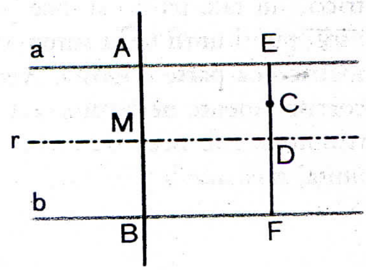


fig. 148

131 Di qui è breve il passo al seguente notevole

TEOREMA **In un piano, il luogo dei punti equidistanti da due rette che si incontrano è la coppia delle rette bisettrici dei quattro angoli formati dalle due rette (fig. 146).**

132 Ci limitiamo ad enunciare i teoremi illustrati in figg. 147 e 148:

TEOREMA **Il luogo dei punti di un piano che hanno da una retta assegnata una distanza congruente ad un dato segmento, è costituito da due rette parallele alla retta data e che stanno da parti opposte di essa (fig. 147).**

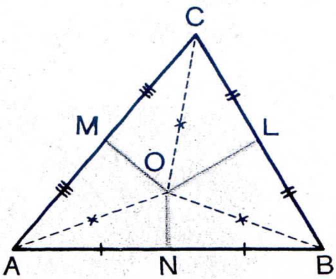


fig. 149

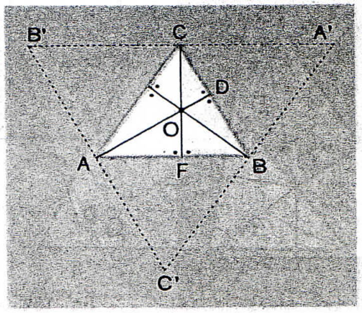


fig. 150

133 TEOREMA Il luogo dei punti di un piano equidistanti da due rette parallele è una retta parallela alle date, la quale divide in due parti congruenti la striscia che ha per lati le due rette date (fig. 148).

DEFINIZIONE La retta che divide in due parti congruenti una striscia ed è parallela ai lati di questa si dice **bisettrice della striscia.**

OSSERVAZIONE Anche una retta AB (fig. 148) perpendicolare ai lati di una striscia divide quest'ultima in due parti congruenti.

La bisettrice r (fig. 148) è asse di simmetria della striscia, come è asse di simmetria anche la retta AB.

Punti notevoli di un triangolo

134 TEOREMA Gli assi dei lati di un triangolo passano per uno stesso punto equidistante dai vertici (detto **circocentro**).

Dato il triangolo ABC, si costruiscano gli assi dei lati AB, AC (fig. 149): tali assi dovranno incontrarsi in un punto O, perchè perpendicolari a due rette che si intersecano (n. 74). Essendo O sull'asse di AB, sarà $OA \cong OB$; ma O sta pure sull'asse di AC e perciò $OA \cong OC$, ossia il punto O è equidistante dai vertici del triangolo e apparterrà di conseguenza anche all'asse del lato BC.

135 TEOREMA Le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto (detto ortocentro).

Dato il triangolo ABC, si conducano dai vertici le parallele ai lati opposti, che a due a due si incontreranno perchè le parallele a due rette che si intersecano si devono pure intersecare. Sia allora $A'B'C'$ il triangolo che in tal modo si viene a costruire (fig. 150). Facilmente si può provare che i vertici A, B, C del triangolo dato sono i punti medi dei lati del triangolo $A'B'C'$. Infatti, $AB \cong CB'$ e $AB \cong CA'$ perchè segmenti paralleli compresi fra rette parallele, perciò $CA' \cong CB'$, ossia C è il punto di mezzo di $A'B'$. E analogamente per gli altri lati.

Ora si ricordi che ogni perpendicolare a una retta è perpendicolare pure a una qualunque parallela alla prima: allora è chiaro che le altezze del triangolo ABC