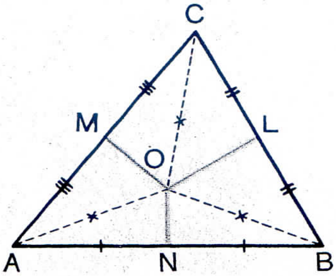

fig. 149

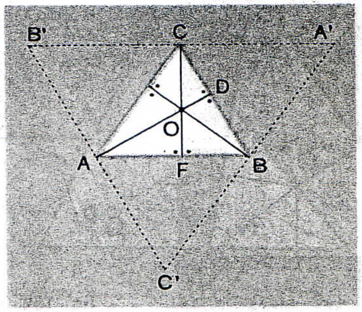

fig. 150

133 TEOREMA **Il luogo dei punti di un piano equidistanti da due rette parallele è una retta parallela alle date, la quale divide in due parti congruenti la striscia che ha per lati le due rette date** (fig. 148).

DEFINIZIONE La retta che divide in due parti congruenti una striscia ed è parallela ai lati di questa si dice **bisettrice della striscia**.

OSSERVAZIONE Anche una retta AB (fig. 148) perpendicolare ai lati di una striscia divide quest'ultima in due parti congruenti.

La bisettrice r (fig. 148) è asse di simmetria della striscia, come è asse di simmetria anche la retta AB.

Punti notevoli di un triangolo

134 TEOREMA **Gli assi dei lati di un triangolo passano per uno stesso punto equidistante dai vertici** (detto **circocentro**).

Dato il triangolo ABC, si costruiscano gli assi dei lati AB, AC (fig. 149): tali assi dovranno incontrarsi in un punto O, perchè perpendicolari a due rette che si intersecano (n. 74). Essendo O sull'asse di AB, sarà $OA \cong OB$; ma O sta pure sull'asse di AC e perciò $OA \cong OC$, ossia il punto O è equidistante dai vertici del triangolo e apparterrà di conseguenza anche all'asse del lato BC.

135 TEOREMA **Le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto (detto ortocentro).**

Dato il triangolo ABC, si conducano dai vertici le parallele ai lati opposti, che a due a due si incontreranno perchè le parallele a due rette che si intersecano si devono pure intersecare. Sia allora $A'B'C'$ il triangolo che in tal modo si viene a costruire (fig. 150). Facilmente si può provare che i vertici A, B, C del triangolo dato sono i punti medi dei lati del triangolo $A'B'C'$. Infatti, $AB \cong CB'$ e $AB \cong CA'$ perchè segmenti paralleli compresi fra rette parallele, perciò $CA' \cong CB'$, ossia C è il punto di mezzo di $A'B'$. E analogamente per gli altri lati.

Ora si ricordi che ogni perpendicolare a una retta è perpendicolare pure a una qualunque parallela alla prima: allora è chiaro che le altezze del triangolo ABC

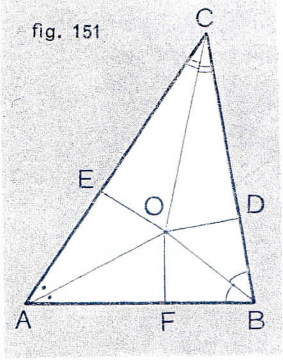

fig. 151

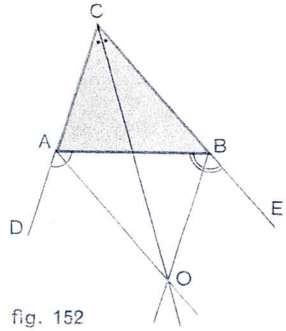

fig. 152

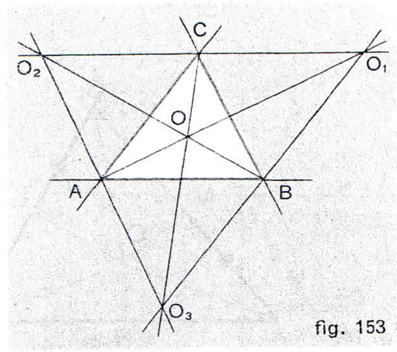

fig. 153

sono gli assi dei lati del triangolo $A'B'C'$ e perciò dovranno incontrarsi in un punto in virtù del teorema del n. precedente.

OSSERVAZIONE Nel triangolo acutangolo l'ortocentro è interno al triangolo, nel triangolo rettangolo coincide col vertice dell'angolo retto e nel triangolo ottusangolo è esterno al triangolo.

136 TEOREMA Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo passano per uno stesso punto equidistante dai lati (detto incentro).

Dato il triangolo ABC, si trovino le bisettrici degli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$: siccome la somma di questi due angoli è minore di un piatto (n. 61), anche le rispettive metà avranno per somma un angolo minore di un piatto e perciò le due bisettrici si intersecheranno in un punto O, il quale dovendo appartenere contemporaneamente agli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ risulterà interno al triangolo. Ma tale punto, per il teorema n. 130, risulta equidistante dai lati degli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ cioè, condotte dal punto O le perpendicolari ai lati, risulta $OE \cong OF \cong OD$ (fig. 151), perciò il punto O si trova pure ad uguale distanza dai lati dell'angolo $\widehat{C}$ e come tale starà pure sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$.

137 TEOREMA Le bisettrici di due angoli esterni di un triangolo e dell'angolo interno non adiacente ad essi passano per uno stesso punto (detto excentro).

Dato il triangolo ABC, si considerino le bisettrici degli angoli esterni adiacenti al lato AB e si indichi con O il loro punto di intersezione (fig. 152). Poichè O si trova sulle bisettrici degli angoli $\widehat{DAB}$, $\widehat{EBA}$, sarà equidistante dalle rette AD, AB e dalle rette AB, BE, quindi risulterà equidistante dai lati dell'angolo $\widehat{ACB}$ e starà perciò anche sulla bisettrice dell'angolo stesso.

138 OSSERVAZIONE Dai teoremi n. 136 e 137 si deduce che nel piano di un triangolo vi sono quattro punti equidistanti dalle rette dei lati: l'incentro e tre excentri. L'incentro è interno al triangolo e gli altri tre punti sono esterni (fig. 153).

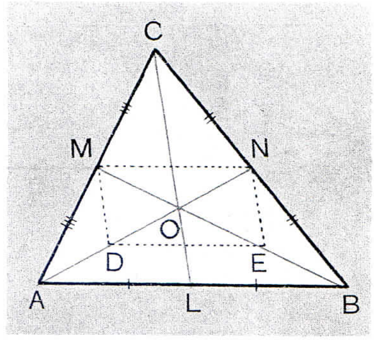

fig. 154

139 TEOREMA **In un triangolo le tre mediane passano per uno stesso punto (detto baricentro) del triangolo, che divide ciascuna mediana in due parti, di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra.**

Dato il triangolo ABC, si conducano le mediane AN, BM dei lati BC e AC e sia O il loro punto di intersezione (fig. 154); dimostriamo che OB è doppio di OM e OA doppio di ON.

Siano D e E i punti medi rispettivamente di OA e OB e si congiungano fra loro; allora nel triangolo AOB il segmento DE è parallelo ad AB e congruente alla metà di esso (n. 123). Ma considerando il triangolo ABC, anche MN è parallelo ad AB e congruente alla sua metà (per lo stesso teorema ora citato), perciò MN e DE sono segmenti paralleli e congruenti fra loro. Ne segue che il quadrilatero $DENM$ è un parallelogrammo, perchè ha due lati opposti paralleli e congruenti. Ma in ogni parallelogrammo le diagonali si dimezzano scambievolmente, perciò $OM \cong OE$ e $ON \cong OD$, ossia OM è metà di OB e ON è metà di OA.

Ora, poichè due mediane qualunque di un triangolo si tagliano in modo che la parte contenente il vertice è doppia dell'altra, anche la terza mediana dovrà passare per il punto d'intersezione delle altre due.

Il circocentro, l'ortocentro, l'incentro, i tre excentri e il baricentro diconsi punti notevoli del triangolo.

In un triangolo equilatero il baricentro, l'ortocentro, l'incentro e il circocentro coincidono in un unico punto.