Dall'unicità della perpendicolare ad una retta in un punto (n. 65) si deduce che *per un punto di una circonferenza passa una e una sola tangente alla circonferenza.*

Posizioni reciproche di due circonferenze complanari

165 Due circonferenze situate nello stesso piano non possono avere più di due punti in comune, perchè se ve ne fossero tre, esse coinciderebbero in virtù del teorema n. 156.

Ne segue che due circonferenze complanari o non hanno alcun punto in comune, oppure uno solo, oppure due. I casi che si possono presentare sono cinque, come è suggerito da queste considerazioni di carattere intuitivo. I centri delle due circonferenze siano sufficientemente lontani: allora esse non avranno punti in comune e ognuna sarà esterna all'altra; avvicinandole lungo la retta dei centri, a un certo momento si toccheranno in un punto rimanendo esterne l'una all'altra; successivamente si intersecheranno in due punti; poi avranno nuovamente un solo punto in comune, ma una sarà interna all'altra; infine non avranno alcun punto in comune e una di esse sarà tutta interna alla seconda.

Questi casi possibili dipendono dalle posizioni dei centri e dai raggi delle due circonferenze, nel modo stabilito da alcuni teoremi che dimostreremo fra poco.

166 Per semplificare l'enunciato dei teoremi facciamo precedere le seguenti

DEFINIZIONI Due circonferenze di raggi diversi si dicono:

1) **esterne** quando tutti i punti di una circonferenza sono esterni all'altra e viceversa;

2) **tangenti esternamente** quando hanno un punto in comune (**punto di contatto**) e tutti gli altri punti rispettivamente esterni;

3) **secanti** quando hanno due punti in comune;

4) **tangenti internamente** quando hanno un punto in comune e tutti gli altri punti della minore sono interni alla maggiore;

5) **una interna all'altra** quando tutti i punti della minore sono interni alla maggiore.

fig. 173

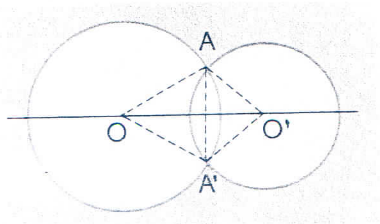
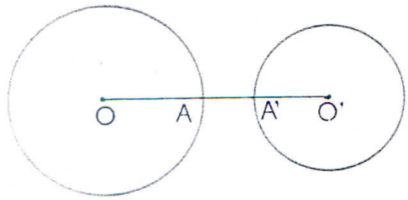


fig. 172



167 OSSERVAZIONI

a) Quando due circonferenze hanno in comune un punto A, non appartenente alla retta dei centri, hanno pure in comune il punto A' simmetrico del punto A rispetto alla retta dei centri.

Infatti (fig. 172), la retta dei centri è asse di simmetria per entrambe le circonferenze.

b) Se due circonferenze hanno un solo punto in comune, questo deve appartenere alla retta dei centri e quindi deve essere un estremo comune dei due diametri.

c) Se due circonferenze diverse hanno due punti in comune questi non possono essere sulla retta dei centri, perchè, altrimenti, le due circonferenze, avendo gli stessi diametri, coinciderebbero.

168 Esaminiamo ora separatamente i seguenti

TEOREMI 1) Se due circonferenze sono esterne l'una all'altra, la distanza dei loro centri è maggiore della somma dei raggi.

$$C, C' \text{ esterne} \Rightarrow OO' > r + r'$$

Siano O e O' i centri delle due circonferenze C e C' di raggi rispettivamente r ed r' (fig. 173). Indichiamo con A e A' i punti di intersezione del segmento OO' con le due circonferenze. Dalla fig. 173 si ha:

$$OO' = OA + AA' + A'O'$$

cioè:

$$OO' = r + AA' + r'$$

quindi:

$$OO' > r + r'.$$

2) Se due circonferenze sono tangenti esternamente, la distanza dei loro centri è uguale alla somma dei raggi.

$$C, C' \text{ tang. esternamente} \Rightarrow OO' = r + r'$$

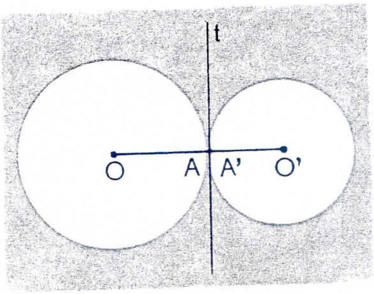


fig. 174

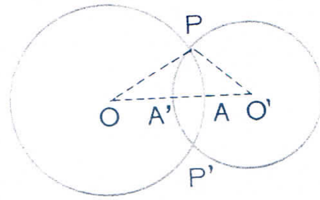
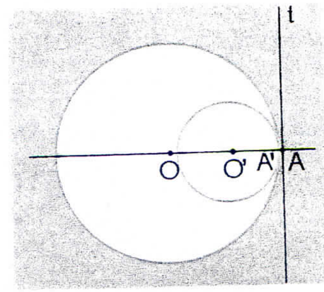


fig. 175

fig. 176



Per l'osservazione b) del n. 167 il punto comune $A = A'$ è sulla retta dei centri. Dalla fig. 174 si ha:

$$OO' = OA + A'O'$$

cioè:

$$OO' = r + r'.$$

La retta t perpendicolare alla retta OO' passante per A risulta tangente tanto all'una quanto all'altra circonferenza (perchè perpendicolare alle estremità dei rispettivi raggi (n. 164). Tale retta si dice tangente comune alle due circonferenze *che giacciono da bande opposte rispetto ad essa.*

3) Se due circonferenze sono secanti, la distanza dei loro centri è minore della somma dei raggi, ma maggiore della loro differenza.

$$C \text{ e } C' \text{ secanti} \Rightarrow r - r' < OO' < r + r'$$

Siano O e O' i centri delle due circonferenze C e C' di raggi r, r' con $r > r'$ e siano P e P' i punti comuni, simmetrici rispetto alla retta OO' (osservazione c) del n. 167) e congiungiamo P con O e con O'.

Dal triangolo OPO' (fig. 175) si ha:

$$OP - PO' < OO' < OP + PO'$$

cioè:

$$r - r' < OO' < r + r'.$$

4) Se due circonferenze sono tangenti internamente, la distanza dei loro centri è uguale alla differenza dei raggi.

$$C \text{ e } C' \text{ tang. internamente} \Rightarrow OO' = r - r'$$

Siano O e O' i centri delle due circonferenze C e C' di raggi r ed r' con $r > r'$ e sia $A = A'$ il punto di contatto.

Dalla fig. 176 si ha:

$$OO' = OA - O'A'$$

cioè:

$$OO' = r - r'.$$