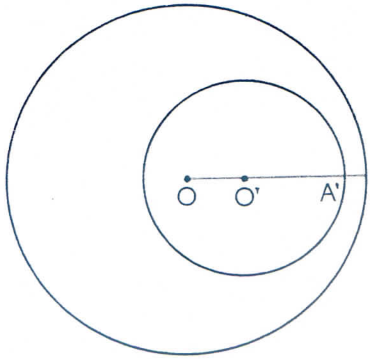

fig. 177

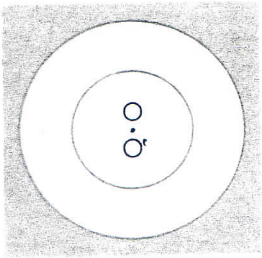

fig. 178

Anche in questo caso come nel 2° la retta t perpendicolare alla retta OO' nel punto A risulta tangente ad ambedue le circonferenze.

5) Se due circonferenze sono interne l'una all'altra, la distanza dei loro centri è minore della differenza dei raggi.

$$C' \text{ è interna a } C \Rightarrow OO' < r - r'$$

Siano O e O' i centri delle circonferenze C e C' di raggi r ed r' con $r > r'$. Siano A e A' i punti d'intersezione della retta OO' con le due circonferenze. Dalla fig. 177 si ha:

$$OO' = OA - O'A' - A'A$$

ed aggiungendo ad entrambi i membri $A'A$, si ottiene:

$$OO' + AA' = r - r'$$

e quindi:

$$OO' < r - r'.$$

In questo quinto caso, se la distanza dei due centri è nulla, le circonferenze sono concentriche e limitano una parte di piano che si chiama **corona circolare** (fig. 178).

OSSERVAZIONE Se i raggi delle due circonferenze sono congruenti, gli ultimi due casi non possono verificarsi: perciò due circonferenze congruenti di uno stesso piano non possono essere che esterne, o tangenti esternamente, o secanti.

169 Le cinque relazioni fra i raggi di due circonferenze e la distanza dei loro centri, contemplate nei teoremi dimostrati, sono tutte distinte e si escludono a vicenda; allora, per la seconda legge delle inverse, sussistono i seguenti

TEOREMI (inversi) 1) Se la distanza dei centri di due circonferenze è maggiore della somma dei raggi, le due circonferenze non hanno alcun punto in comune e i punti di ciascuna sono esterni all'altra.

2) Se la distanza dei centri di due circonferenze è uguale alla somma dei raggi, le due circonferenze hanno un solo punto in comune; sono cioè tangenti esternamente.

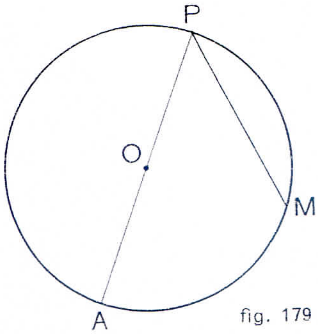

fig. 179

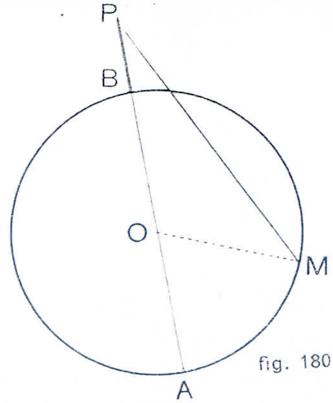

fig. 180

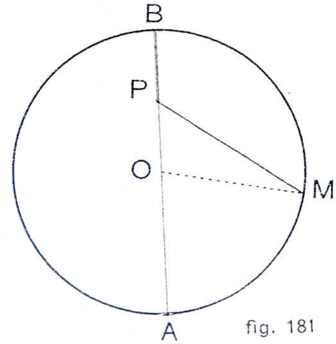

fig. 181

3) Se la distanza dei centri di due circonferenze è minore della somma dei raggi, ma maggiore della loro differenza, le circonferenze sono secanti.

4) Se la distanza dei centri di due circonferenze è uguale alla differenza dei raggi, esse sono tangenti internamente.

5) Se la distanza dei centri di due circonferenze è minore della differenza dei raggi, esse sono una interna all'altra.

170 *Quadro sinottico*, in cui d indica OH, r, r' indicano i raggi e Γ, Γ' le circonferenze.

$$d > r + r' \Leftrightarrow \Gamma, \Gamma' \text{ sono } \textbf{esterne}$$

$$d = r + r' \Leftrightarrow \Gamma, \Gamma' \text{ sono } \textbf{tangenti esternamente}$$

$$r - r' < d < r + r' \Leftrightarrow \Gamma, \Gamma' \text{ sono } \textbf{secanti}$$

$$d = r - r' \Leftrightarrow \Gamma, \Gamma' \text{ sono } \textbf{tangenti internamente}$$

$$d < r - r' \Leftrightarrow \Gamma' \text{ è } \textbf{interna} \text{ a } \Gamma.$$

171 TEOREMA Fra tutti i segmenti che uniscono i punti di una circonferenza con un altro punto (che non sia il centro) il massimo è quello che passa per il centro e il minimo quello il cui prolungamento passa per il centro.

Sia P un punto qualunque del piano di una circonferenza di centro O: se P appartiene alla circonferenza (fig. 179), il teorema è di immediata evidenza, perchè fra i segmenti che uniscono P agli altri punti M della circonferenza, quello che passa per il centro è il diametro e come tale è maggiore di tutti gli altri che sono delle corde. Il segmento minimo in questo caso è il segmento nullo.

Se il punto P non è sulla circonferenza, può essere esterno od interno ad essa, ma la dimostrazione del teorema si conduce nei due casi nello stesso modo.

Si congiunga P con O e si indichino con A e B i punti di intersezione della retta PO con la circonferenza (figg. 180 e 181): il punto A sia l'estremo del segmento che, avendo per origine P, passa per O e B l'estremo del segmento il cui prolungamento passa per O: si tratta di dimostrare che PA è maggiore

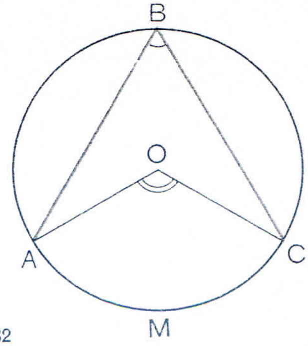

fig. 182

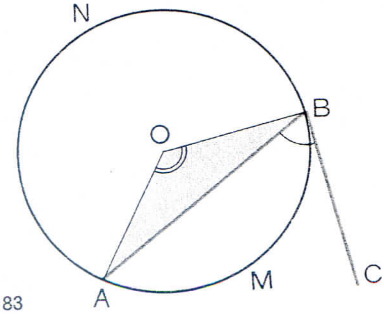

fig. 183

e PB minore di qualsiasi altro segmento che unisce P con un altro punto qualunque M della circonferenza.

Infatti, dal triangolo POM si ha:

$$PM < PO + OM\ ;$$

ma $OM \cong OA$, perciò:

$$PM < PO + OA \qquad \text{ossia} \qquad PM < PA.$$

Dallo stesso triangolo si ha:

$$PM > OP - OM \qquad \text{se } P \text{ è esterno}$$
$$PM > OM - OP \qquad \text{se } P \text{ è interno.}$$

Ma $OM \cong OB$, perciò nel 1° caso si ha:

$$PM > OP - OB \qquad \text{ossia} \qquad PM > PB,$$

nel 2° caso si ha:

$$PM > OB - OP \qquad \text{ossia} \qquad PM > PB.$$

Le disuguaglianze stabilite mostrano appunto che PA è maggiore e PB minore di ogni segmento PM.

172 DEFINIZIONE Il segmento minimo fra i segmenti che uniscono un punto coi punti della circonferenza, si chiama **distanza** del punto dalla circonferenza.

173 Abbiamo visto altre volte che il concetto di distanza è legato al concetto di minimo.

In generale, data una figura F e un punto P non appartenente alla figura, se fra i segmenti che uniscono P con i punti di F c'è un segmento minimo, cioè non maggiore di alcun altro, esso si chiama **distanza** di P da F.

Se P appartiene alla figura F, si dice che P ha *distanza* **nulla** da F.