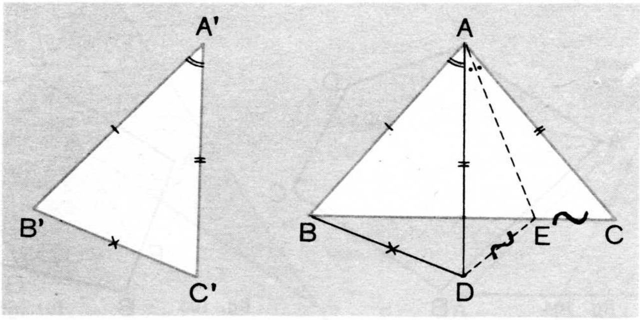

fig. 106

Diseguaglianze fra elementi di due triangoli

89 TEOREMA Se due triangoli hanno due lati rispettivamente congruenti ma l'angolo compreso disuguale, i terzi lati sono disuguali e precisamente è maggiore quello opposto all'angolo maggiore.

Siano ABC, $A'B'C'$ due triangoli tali per cui risulti $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$ (ipotesi); diciamo che $BC > B'C'$ (fig. 106) (tesi)

Infatti, si conduca da A la semiretta AD in modo che formi con AB, dalla parte del vertice C, un angolo $\widehat{BAD} \cong \widehat{B'A'C'}$; e su di essa si prenda $AD \cong A'C'$ e si unisca B con D. I due triangoli BAD, $B'A'C'$ risultano congruenti per avere due lati e l'angolo compreso ordinatamente congruenti, perciò $BD \cong B'C'$: basterà quindi dimostrare che $BC > BD$.

Per questo, si noti che il punto D può cadere dentro o fuori del triangolo ABC oppure sul lato BC. Se cade sul lato BC, si ha subito $BC > BD$ e il teorema è dimostrato. Se ciò non avviene, si conduca la bisettrice dell'angolo DAC e sia E il punto in cui essa taglia il lato BC. I due triangoli AED, AEC risultano congruenti avendo due lati e l'angolo compreso rispettivamente congruenti e sarà perciò $ED \cong EC$. Si consideri ora il triangolo BDE: per il teorema n. 87 si ha

$$BD < BE + ED\ ;$$

ma $ED \cong EC$ e $BE + EC = BC$, quindi

$$BD < BC$$

come volevasi dimostrare.

90 TEOREMA (reciproco del precedente) Se due triangoli hanno due lati rispettivamente congruenti e i terzi lati disuguali, al lato maggiore è opposto l'angolo maggiore.

Nei triangoli ABC, $A'B'C'$, sia $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $BC > B'C'$ (ipotesi); diciamo che $\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$ (tesi) (fig. 107).

Infatti, non può essere $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$, perchè altrimenti i due triangoli sa-

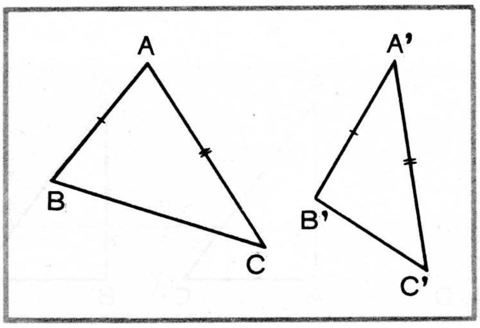

fig. 107

rebbero eguali (I Criterio) e risulterebbe $BC \cong B'C'$ contro l'ipotesi; non può essere neppure $\widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'}$, perchè allora sarebbe $BC < B'C'$ per il teorema precedente, il che è pure contro il supposto. Si deve dunque concludere che è $\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$.

91 OSSERVAZIONE A proposito dell'ultimo teorema, reciproco del precedente, possiamo fare le seguenti riflessioni.

Sugli angoli α, α' compresi fra coppie di lati rispettivamente congruenti $c \cong c'$, $b \cong b'$, in due triangoli $T(a, b, c)$ e $T'(a', b', c')$ le possibili ipotesi che possiamo fare sono le seguenti:

1) $\alpha \cong \alpha'$, 2) $\alpha > \alpha'$, 3) $\alpha < \alpha'$.

Esse portano alle tesi corrispondenti:

1_1) $a \cong a'$ (primo criterio di congruenza)

2_1) $a > a'$ (teorema n. 83)

3_1) $a < a'$ (teorema n. 83),

le quali si escludono a vicenda.

Per la II legge delle inverse, sussistono i teoremi inversi, i quali si enunciano simbolicamente così:

1_2) $(b \cong b' \text{ et } c \cong c') \text{ et } a \cong a' \Rightarrow \alpha \cong \alpha'$

2_2) $(b \cong b' \text{ et } c \cong c') \text{ et } a > a' \Rightarrow \alpha > \alpha'$

3_2) $(b \cong b' \text{ et } c \cong c') \text{ et } a < a' \Rightarrow \alpha < \alpha'$

Può essere interessante riconoscere nel teorema 1_2 le ipotesi del III criterio di congruenza e riconoscere, insieme, che esso viene ricondotto al I Criterio.

Dato che non vi si è mai ricorsi, si sarebbe potuto ritardare la dimostrazione del III Criterio fino a questo punto, per economia di pensiero.

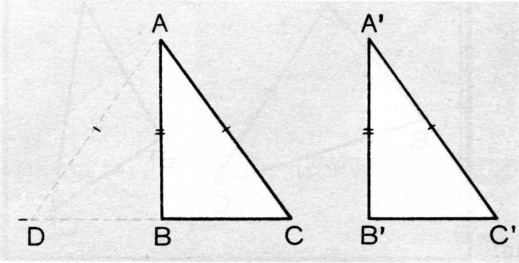

fig. 108

Congruenza dei triangoli rettangoli

92 Tenendo presente che due triangoli rettangoli hanno sempre un elemento congruente (l'angolo retto) e ricordando anche il corollario 3 n. 78, si vede subito che i primi due casi di congruenza dei triangoli, quando questi sono rettangoli, dànno luogo all'enunciato seguente:

Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti:

1) *i cateti,* oppure
2) *un cateto e l'angolo acuto opposto,* oppure
3) *un cateto e l'angolo acuto adiacente,* oppure
4) *l'ipotenusa e un angolo acuto.*

93 Per i triangoli rettangoli vi è un altro caso di congruenza contenuto nel seguente

TEOREMA Due triangoli rettangoli sono congruenti quando hanno l'ipotenusa ed un cateto rispettivamente congruenti.

Nei due triangoli ABC, $A'B'C'$ rettangoli rispettivamente in B e in B' (fig. 108) siano congruenti i cateti AB, $A'B'$ e le ipotenuse AC, $A'C'$ (ipotesi); si vuol dimostrare che i due triangoli sono congruenti (tesi).

Sulla semiretta opposta a BC si prenda $BD \cong B'C'$ e si congiunga A con D. I triangoli rettangoli ABD, $A'B'C'$ risultano congruenti, perchè hanno i cateti congruenti e perciò è $AD \cong A'C' \cong AC$. Il triangolo DAC è allora isoscele rispetto alla base DC e AB, perpendicolare alla base (altezza), ne è perciò anche mediana: quindi $BC \cong BD$. Ma $BD \cong B'C'$, onde si ha $BC \cong B'C'$ e allora i due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono congruenti, perchè hanno i lati rispettivamente congruenti.