Equazioni parametriche

Data l'equazione $a(k)x^2 + b(k)x + c(k) = 0 \;\wedge k \in R$ determinare k in modo che si abbia:

1. radici reali $\Rightarrow x_1, x_2 \in R \Rightarrow \Delta \geq 0$ (o $\Delta/4 \geq 0$)
2. radici reali e distinte $\Rightarrow x_1 \neq x_2 \in R \Rightarrow \Delta > 0$ (o $\Delta/4 > 0$)
3. radici reali e coincidenti $\Rightarrow x_1 = x_2 \in R \Rightarrow \Delta = 0$ (o $\Delta/4 = 0$)
4. radici complesse $\Rightarrow x_1, x_2 \notin R \Rightarrow \Delta < 0$ (o $\Delta/4 < 0$)
5. equazione degenere $\Rightarrow x_1 \to \infty \Rightarrow a(k) = 0$
6. radici opposte $\Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow b(k) = 0$
7. una radice nulla $\Rightarrow x_1 = 0$ (spuria) $\Rightarrow c(k) = 0$
8. una radice uguale a n $\Rightarrow x_1 = n \Rightarrow$ si sostituisce n alla x e si risolve l'equazione in k
9. la somma delle radici uguale a n $\Rightarrow x_1 + x_2 = n \Rightarrow -\dfrac{b}{a} = n$
10. il prodotto delle radici uguale a n $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = n \Rightarrow \dfrac{c}{a} = n$
11. radici reali e concordi $\Rightarrow x_1, x_2 \in R \wedge x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$
12. radici reali e discordi $\Rightarrow x_1, x_2 \in R \wedge x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \end{cases}$
13. radici reali positive $\Rightarrow x_2 \geq x_1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$
14. radici reali negative $\Rightarrow x_1 \leq x_2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$
15. radici reciproche $\Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{x_2}$ (o $x_1 \cdot x_2 = 1$) $\Rightarrow \dfrac{c}{a} = 1$
16. radici antireciproche $\Rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{x_2}$ (o $x_1 \cdot x_2 = -1$) $\Rightarrow \dfrac{c}{a} = -1$
17. la somma dei quadrati delle radici uguale a n $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = n \Rightarrow$ con Waring

    $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = n \Rightarrow \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 2\dfrac{c}{a} = n$
18. la somma dei cubi delle radici uguale a n $\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = n \Rightarrow$ con Waring

    $(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = n \Rightarrow \left(-\dfrac{b}{a}\right)^3 - 3\dfrac{c}{a} \cdot \left(-\dfrac{b}{a}\right) = n$

19. la somma dei reciproci delle radici uguale a n $\Rightarrow$ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=n$ $\Rightarrow$ $\frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2}=n$ $\Rightarrow$

$-\frac{b}{c}=n$

20a. la somma dei quadrati dei reciproci delle radici uguale a n $\Rightarrow$ $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=n$ $\Rightarrow$

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2}=n \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=n$$

20b. la somma dei cubi dei reciproci delle radici uguale a n $\Rightarrow$ $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=n$ $\Rightarrow$

$$\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3}=n \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^3}=n$$

21. le radici sono una in relazione dell'altra $\Rightarrow$ $F(x_1,x_2)=0$ si procede nel seguente modo:

a) $\begin{cases} F(x_1,x_2)=0 \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$ si risolve il sistema e si trovano le radici che dipendono da k

b) si sostituisce in $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$ le radici trovate ($x_1=f(k)$ e $x_2=g(k)$)

c) si risolve l'equazione di 2° grado in k .