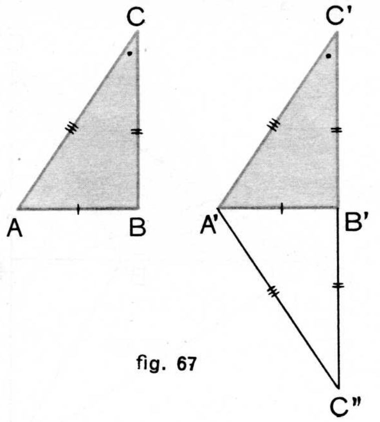


fig. 67

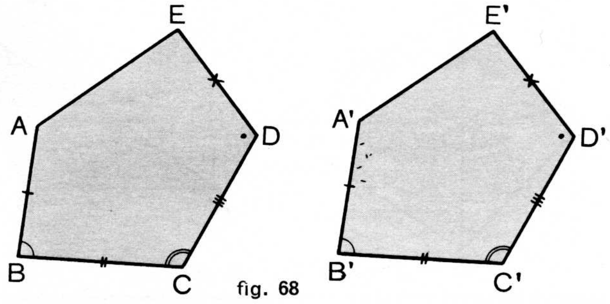


fig. 68

Criteri di congruenza dei poligoni

54 Due poligoni congruenti, quindi sovrapponibili, hanno ordinatamente congruenti i lati e gli angoli.

La relazione di congruenza fra due poligoni implica le relazioni di congruenza fra lati corrispondenti ed angoli corrispondenti. Se i due poligoni hanno n lati, il numero delle relazioni suddette è $2n$. Come nel caso dei triangoli, queste $2n$ relazioni di congruenza fra i $2n$ elementi di due poligoni di n lati sono sovrabbondanti per dedurre la congruenza dei due poligoni. Ecco i criteri di congruenza dei poligoni, riassunti nel

TEOREMA Due poligoni convessi di uguale numero di lati sono congruenti, se si suppone che abbiano tutti i lati e gli angoli ordinatamente congruenti, eccetto:

1) **un lato e i due angoli adiacenti,** oppure
2) **due lati consecutivi e l'angolo compreso,** oppure
3) **tre angoli consecutivi,**

sui quali non si fa alcuna ipotesi.

Dimostriamo il primo di questi criteri. Siano dati (fig. 68), i due pentagoni $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ e supponiamo di sapere che gli elementi dell'uno sono ordinatamente congruenti a quelli dell'altro, tranne per i lati AE, $A'E'$ e per gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{A'}$, $\widehat{E}$, $\widehat{E'}$, sui quali non facciamo alcuna ipotesi; si vuol dimostrare che i due poligoni sono congruenti.

Un movimento che sovrappone l'angolo $\widehat{B}$ all'angolo congruente $\widehat{B'}$, per le ipotesi ammesse, sovrappone il segmento BA al segmento $B'A'$ e il segmento BC a $B'C'$; quindi A a A' e C a C'. Per la congruenza degli angoli $\widehat{C}$ e $\widehat{C'}$ e dei lati CD e $C'D'$, il vertice D coinciderà con D' e per una ragione analoga il vertice E coinciderà con E'.

I due poligoni sono allora esattamente sovrapponibili e perciò sono congruenti.

In modo analogo si dimostra il secondo criterio, contemplato nella fig. 69.

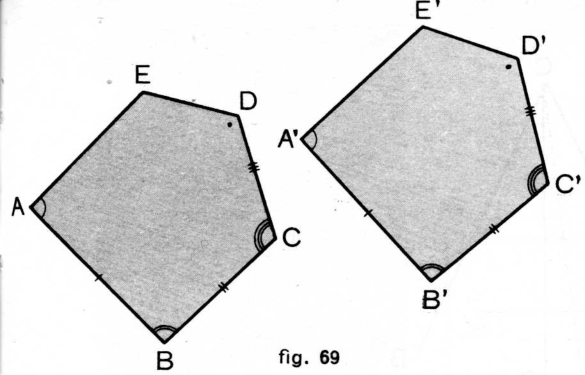


fig. 69

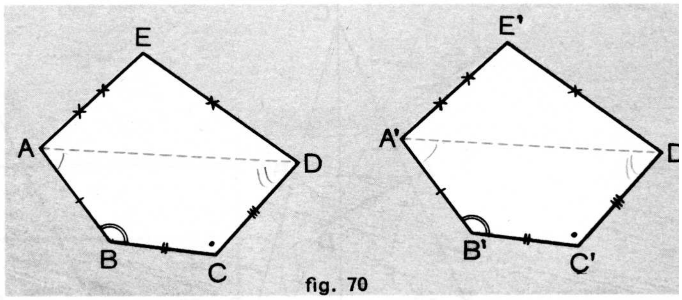


fig. 70

Per la dimostrazione del terzo criterio supponiamo che i due pentagoni della fig. 70 abbiano i lati rispettivamente congruenti e $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$, $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$; anche se nulla si sa degli angoli rimanenti, possiamo dire che i due poligoni sono congruenti.

Infatti, con i consueti ragionamenti si prova che la spezzata $ABCD$ è sovrapponibile alla spezzata $A'B'C'D'$; dopo di che si potrà affermare che $AD \cong A'D'$. Ne segue che i due triangoli ADE, $A'D'E$ sono congruenti, perchè hanno i lati ordinatamente congruenti; perciò quando nella sovrapposizione il segmento AD coincide con $A'D'$ il vertice E coinciderà con E'. In tal modo i due poligoni risultano esattamente sovrapponibili e quindi sono congruenti.

Bisettrice di un angolo e punto medio di un segmento

55 TEOREMA Esiste una semiretta e una sola, uscente dal vertice, che divide un angolo in due parti congruenti.

Consideriamo l'angolo convesso $\widehat{ACB}$ e sui lati, a partire da C, prendiamo due segmenti CA, CB congruenti fra loro. Uniamo ora gli estremi A e B del segmento AB con un punto F, interno all'angolo convesso $\widehat{ACB}$ e situato da parte opposta di C rispetto alla retta AB. Se i due angoli $\widehat{FAB}$, $\widehat{FBA}$ sono congruenti, il triangolo FAB risulta isoscele. Se non lo sono, ed è, come in fig. 71, $\widehat{FAB} > \widehat{FBA}$, si immagini di condurre per il punto A un raggio che forma con il raggio AB un angolo congruente a $\widehat{FBA}$. Tale raggio incontra BF (n. 18) in un punto D e il triangolo ABD risulterà isoscele sulla base AB. Congiungiamo ora C con D.

I due triangoli ACD, BCD sono congruenti per il III Criterio; quindi gli angoli $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$, corrispondenti nella relazione di congruenza fra i due triangoli, sono congruenti. Dunque la semiretta CD divide l'angolo $\widehat{ACB}$ in parti congruenti o, come si suol dire, lo **divide per metà**.

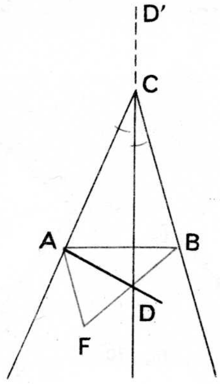


fig. 71

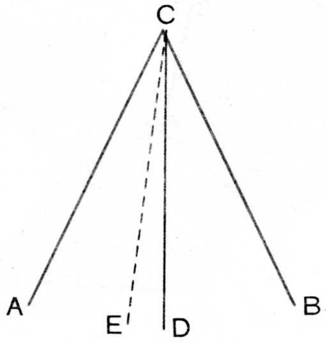


fig. 72

Si aggiunga che non vi può essere un'altra semiretta che goda della stessa proprietà. Infatti (fig. 72), condotta una semiretta qualunque CE appartenente, per es., all'angolo $\widehat{ACD}$, risulta:

$$\widehat{ACE} < \widehat{ACD} \qquad \text{e} \qquad \widehat{BCD} < \widehat{BCE}$$

e poichè i due angoli $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$ sono congruenti, sarà:

$$\widehat{ACE} < \widehat{BCE},$$

cioè la semiretta CE non può dividere per metà l'angolo C.

Se si considera il prolungamento CD' della semiretta CD (fig. 71), si ha $\widehat{ACD'} \cong \widehat{BCD'}$, perchè angoli supplementari di angoli congruenti; perciò la semiretta CD' divide per metà l'angolo concavo ABC: il teorema dimostrato vale dunque non solo per gli angoli convessi, ma anche per quelli concavi.

56 *La semiretta che divide un angolo in due parti congruenti e che ha l'origine nel vertice dell'angolo si dice la* **bisettrice** *dell'angolo.* Si dice poi **retta bisettrice** di un angolo la retta che contiene la semiretta bisettrice e quindi anche la semiretta opposta, bisettrice del secondo angolo che ha gli stessi lati del primo. La retta bisettrice di un angolo divide manifestamente per metà anche l'angolo opposto al vertice del primo.

57 TEOREMA In ogni segmento esiste un punto e uno solo che divide il segmento in due parti congruenti.

Si immagini di « costruire » il triangolo isoscele AEB sopra la base AB, nel modo descritto al n. 55 (fig. 73). Conduciamo poi la bisettrice dell'angolo $\widehat{AEB}$ e indichiamo con M il punto in cui essa incontra (n. 18) il lato AB: diciamo che il punto M divide AB in due parti congruenti. Infatti, si considerino i due triangoli AME, BME: essi hanno congruenti due angoli e il lato compreso (come risulta dalle successive « costruzioni »); quindi sono congruenti (II Criterio) e in particolare sarà $MA \cong MB$. Nessun altro punto del segmento AB può

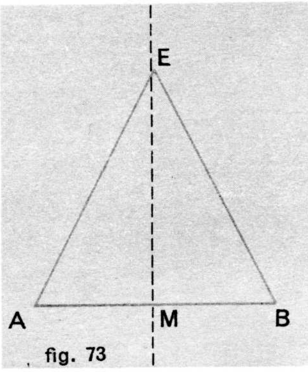
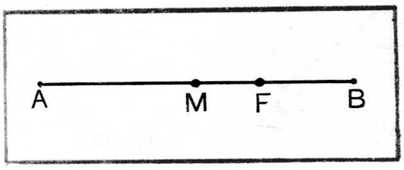


fig. 73

fig. 74



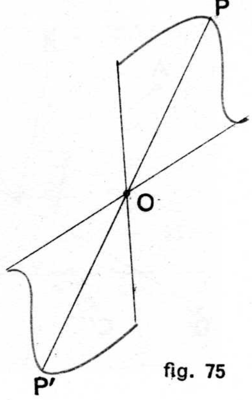


fig. 75

dividerlo in due parti congruenti. Infatti, se F è un punto qualunque compreso, ad esempio, fra M e B (fig. 74), risulta $AF > AM$; $AM \cong MB$; $MB > FB$; perciò $AF > FB$, ossia i due segmenti AF e FB non sono congruenti.

Simmetria centrale

58 *Il punto M che divide il segmento AB in due segmenti congruenti si dice* **punto medio** *di AB o* **centro** *di AB.*

DEFINIZIONE Due punti A, A' si dicono **simmetrici** rispetto ad un punto O quando O è il punto medio del segmento che li unisce, cioè quando O è un punto del segmento AA' e OA è congruente a OA'.

Esiste ed è unico il simmetrico di un punto del piano rispetto ad un centro O del medesimo piano. Infatti, sulla retta PO (fig. 75), a partire da O e dalla parte opposta di P, esiste ed è unico il punto P' tale per cui $OP' \cong OP$ (n. 20).

La relazione tra i punti del piano che nasce associando ad ogni punto P del piano il suo simmetrico è una particolare corrispondenza biunivoca, che si chiama **simmetria del piano rispetto al centro** O, oppure **simmetria centrale**.

DEFINIZIONE Due figure tali che i singoli punti dell'una siano simmetrici dei singoli punti dell'altra, rispetto ad un punto O, si dicono figure **simmetriche** rispetto ad O, che si chiama centro di simmetria delle due figure.

DEFINIZIONE Se una figura è simmetrica di se stessa rispetto ad un punto O, questo punto si chiama *centro di simmetria* della figura.

Si dice anche che la simmetria rispetto ad O *muta* (*trasforma*) la figura in se stessa.

Una figura F e la sua simmetrica F' rispetto ad un punto O formano insieme una nuova figura, che ha per centro di simmetria il punto O.

OSSERVAZIONE Il centro di simmetria ha per simmetrico se stesso.